B452D

BÙI NGỌC ANH

Bồi dưỡng học sinh giỏi
HÌNH HỌC giải tích

PHẦN 02

DÙNG CHO HỌC SINH LỚP 10-11-12
LUYỆN THI CAO ĐẲNG - ĐẠI HỌC

- Hình học giải tích phẳng
- Đường thẳng
- Đường tròn
- Elip
- Hyperbol
- Parabol

Công ty TNHH MTV Dịch vụ Văn hóa Khang Việt
Nhà sách KHANG VIỆT

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
DVL 13016 13

ĐHQG HÀ NỘI
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm mục đích giúp các em học sinh Trung học Phổ thông và các độc giả:

- Phương pháp suy nghĩ, suy luận Toán.
- Phương pháp vận dụng kiến thức giáo khoa vào bài tập.
- Cung cấp kĩ năng và đức tính kiên trì, cần mẫn khi giải toán.

Chúng tôi biên soạn cuốn sách này.

Sách được viết tỉ mỉ, công phu, kĩ lưỡng; do số lượng kiến thức và bài tập nhiều nên được chia thành 2 cuốn:

Cuốn I: ***Bồi dưỡng học sinh giỏi Hình học giải tích*** trong mặt phẳng bao gồm: phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, đường thẳng, đường tròn, elip; Hình học giải tích trong mặt phẳng: hyperbol, parabol và các bài toán tổng hợp.

Cuốn II: ***Bồi dưỡng học sinh giỏi Hình học giải tích*** trong không gian: vectơ, phương pháp tọa độ trong không gian, mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu và đường tròn trong không gian.

Phương pháp giải ngắn gọn, đơn giản, dễ hiểu và chỉ sử dụng các kiến thức cho phép dùng trong sách giáo khoa hiện hành; trước mỗi mục đều có tóm tắt các kiến thức cơ bản và các kĩ năng cần có. Hy vọng rằng cuốn sách này sẽ là tài liệu tham khảo quí báu cho tất cả các em học sinh và các độc giả muốn tự học, tự bồi dưỡng kiến thức môn Hình học.

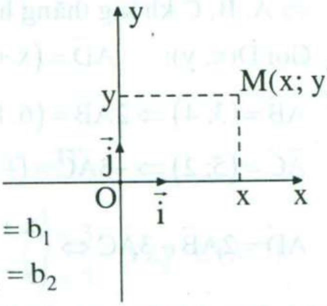
TÁC GIẢ

Nhà sách Khang Việt xin trân trọng giới thiệu tới Quý độc giả và xin lắng nghe mọi ý kiến đóng góp, để cuốn sách ngày càng hay hơn, bổ ích hơn. Thư xin gửi về:

Cty TNHH Một Thành Viên – Dịch vụ Văn hóa Khang Việt.
71, Đinh Tiên Hoàng, P. Đakao. Quận 1, TP. HCM
Tel: (08) 39115694 – 39111969 – 39111968 – 39105797 – Fax: (08) 39110880
Hoặc Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn

Chương I. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA



$\vec{i}, \vec{j}$: các véc tơ đơn vị của Ox, Oy

$$\left.\begin{matrix} M(x_M; y_M) \\ N(x_N; y_N) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M)$$

$\vec{a} = (a_1; a_2)$; $\vec{b} = (b_1; b_2)$; $\vec{0} = (0;0)$; $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$; $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$

$p.\vec{a} = (pa_1; pa_2)$ cùng phương với $\vec{a}$

- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1$
- $\vec{a} . \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

Các hệ quả quan trọng:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$;

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$

$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} . \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

- Nếu điểm M(x; y) thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ $(k \neq 1)$ thì $\begin{cases} x_A = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_A = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases}$ (có thể từ hệ thức $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ để suy ra x_A, y_A).

M là trung điểm AB: $k = -1$: $M \begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

B. ĐỀ TOÁN VÀ LỜI GIẢI

Bài 1. Cho ba điểm A(–1; 1), B(2; 5), C(4; 3).

a. Kiểm tra sự thẳng hàng của ba điểm A, B, C.

b. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

Giải

a. $\overrightarrow{AB}=(3;4)$, $\overrightarrow{AC}=(5;2)$. $3\,.\,2\neq 4\,.\,5 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ không cùng phương $\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow$ A, B, C không thẳng hàng.

b. Gọi D(x; y): $\overrightarrow{AD}=(x+1;\,y-1)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(3;4)\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}=(6;8)\\ \overrightarrow{AC}=(5;2)\Rightarrow -3\overrightarrow{AC}=(-15;-6)\end{array}\right\}\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=(-9;2)$$

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=-9\\ y-1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-10\\ y=3\end{cases}\quad \text{Vậy } D(-10;3).$$

Bài 2. Cho 3 điểm A(5; 2), B(1; 1), C(3; 3).

a. Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

b. Tìm tọa độ tâm I của hình bình hành.

Giải

a. Theo thói quen đánh số thứ tự theo vòng của một tứ giác thì ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. Gọi D (x; y) thì $\overrightarrow{CD}=(x-3;\,y-3)$. $\overrightarrow{BA}=(4;1)$.

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=4\\ y-3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\ y=4\end{cases}\quad \text{Vậy } D(7;4).$$

b. I là trung điểm AC $\Leftrightarrow I\begin{cases}x=4\\ y=\dfrac{5}{2}\end{cases}$ Vậy $I\left(4;\dfrac{5}{2}\right)$.

Bài 3. Cho hai điểm A(–3; 1), B(3; 4). Tìm tọa độ các điểm C, D chia đoạn thẳng AB thành 3 đoạn bằng nhau.

Giải

Gọi C, D là các điểm cần tìm. Theo yêu cầu bài toán thì AC = CD = DB.

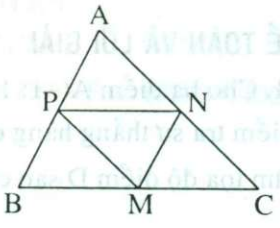
Nếu C(x; y) thì $\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}=(6;3)$, $\overrightarrow{AC}=(x+3;\,y-1)\Rightarrow 3\overrightarrow{AC}=(3x+9;\,3y-3)$

$$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+9=6\\ 3y-3=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}\Rightarrow C(-1;2).$$

D là trung điểm CB: D(1; 3).

Bài 4. Cho tam giác ABC có trung điểm các cạnh BC, CA, AB lần lượt là M(4; 1), N(0; 3), P(1; –1). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.



Giải

Gọi A(x; y): $\overrightarrow{NA}=(x;\, y-3)$, $\overrightarrow{MP}=(-3;\,-2)$

$$\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{MP}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y-3=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=1\end{cases}\text{ Vậy } A(-3;\,1).$$

Gọi B(x; y): $\overrightarrow{PB}=(x-1;\, y+1)$, $\overrightarrow{NM}=(4;\,-2)$

$$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{NM}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=4\\ y+1=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=-3\end{cases}\text{ Vậy } B(5;\,-3).$$

Gọi C(x; y): M là trung điểm BC: $\begin{cases}x=8-5\\ y=2+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=5\end{cases}$ Vậy $C(3;\,5)$.

♦ Lời bình: có thể dùng hệ thức trung điểm.

Bài 5. Cho ba điểm A(5; 1), B(1; –1), C(0; 6).

a. Chứng minh ABC là một tam giác.

b. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác.

c. Tính độ dài trung tuyến AM (kẻ từ đỉnh A) và kiểm tra đẳng thức:

$$AM^2=\frac{2\left(AB^2+AC^2\right)-BC^2}{4}.$$

Giải

a. $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-4;\,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(-5;\,5)\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{-4}{-5}\neq\dfrac{-2}{5}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$ không cùng phương với $\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow$ ABC là một tam giác.

b. G(2; 2)

c. Gọi M là trung điểm BC: $M\left(\dfrac{1}{2};\,\dfrac{5}{2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}AM^2=\left(\dfrac{1}{2}-5\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}-1\right)^2=\dfrac{9^2+3^2}{4}=\dfrac{90}{4}\\ \left.\begin{array}{l}AB^2=16+4=20\\ AC^2=25+25=50\end{array}\right\}2\left(AB^2+AC^2\right)=140\\ BC^2=1+49=50\end{array}\right\}\Rightarrow AM^2=\frac{2\left(AB^2+AC^2\right)-BC^2}{4}=\frac{140-50}{4}=\frac{90}{4}.$$

Bài 6. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với:

a. A(4; –2), B(5; 5), C(–2; 6).

b. A(2; 3), B(3; 6), C(–1; 8).

Giải

a. Gọi I(x; y) là tâm đường tròn ngoại tiếp:

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y+2)^2 = (x-5)^2 + (y-5)^2 \\ (x-4)^2 + (y+2)^2 = (x+2)^2 + (y-6)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 16 + 4y + 4 = -10x + 25 - 10y + 25 \\ -8x + 16 + 4y + 4 = 4x + 4 - 12y + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 14y = 30 \\ -12x + 16y = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y = 15 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-60+35}{25} = 1 \\ y = \dfrac{45+5}{21+4} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(1;2).$$

b. Gọi I(x; y) là tâm đường tròn ngoại tiếp:

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-6)^2 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x+1)^2 + (y-8)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4 - 6y + 9 = -6x + 9 - 12y + 36 \\ -4x + 4 - 6y + 9 = 2x + 1 - 16y + 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 32 \\ 6x - 10y = -52 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 16 \\ 3x - 5y = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-80+78}{-14} = \dfrac{1}{7} \\ y = \dfrac{-26-48}{-14} = \dfrac{74}{14} = \dfrac{37}{7} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{7};\ \frac{37}{7}\right).$$

Bài 7. Cho hai điểm A(–3; 2), B(4; 3). Tìm điểm M trên trục hoành sao cho tam giác MAB vuông tại M.

Giải

Gọi M(x; 0): $\overrightarrow{AM} = (x+3; -2)$; $\overrightarrow{BM} = (x-4; -3)$

Để tam giác MAB vuông tại M $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán: $M_1(3; 0)$, $M_2(-2; 0)$.

Bài 8. Tìm tọa độ trực tâm H và tọa độ chân đường cao A' vẽ từ A trong tam giác ABC với:

a. A(–5; 6), B(–4; –1), C(4; 3).

b. A(5; 5), B(4; 2), C(–2; 1).

Giải

a. Gọi H(x; y)

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AH} = (x+5; y-6) \\ \overrightarrow{BC} = (8; 4) \end{array}\right\} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \quad \begin{array}{l} \Leftrightarrow 8(x+5) + 4(y-6) = 0 \\ \Leftrightarrow 2(x+5) + (y-6) = 0 \Leftrightarrow 2x + y = -4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BH}=(x+4;\,y+1)\\ \overrightarrow{AC}=(9;\,-3)\end{array}\right\}\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\iff 9(x+4)-3(y+1)=0\iff 3x-y=-11$$

Tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y=-4\\ 3x-y=11\end{cases}\iff\begin{cases}x=-3\\ y=2\end{cases}\Rightarrow H(-3;\,2)$.

Gọi A'(x; y)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AA'}=(x+5;\,y-6)\\ \overrightarrow{BC}=(8;\,4)\end{array}\right\}\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{BC}\iff 8(x+5)+4(y-6)=0\iff 2x+y=-4$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BH}=(x+4;\,y+1)\\ \overrightarrow{AC}=(9;\,-3)\end{array}\right\}\begin{array}{l}\overrightarrow{BA'}\text{ cùng phương với }\overrightarrow{BC}\iff\dfrac{x+4}{8}=\dfrac{y+1}{4}\\ \iff\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y+1}{1}\iff x-2y=-2\end{array}$$

Tọa độ A' là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y=-4\\ x-2y=-2\end{cases}\iff\begin{cases}x=\dfrac{10}{-5}=-2\\ y=\dfrac{0}{-5}=0\end{cases}\Rightarrow A'(-2;\,0)$

a. Gọi H(x; y)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AH}=(x-5;\,y-5)\\ \overrightarrow{BC}=(-6;\,-1)\end{array}\right\}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\iff 6(x-5)+y-5=0\iff 6x+y=35$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BH}=(x-4;\,y-2)\\ \overrightarrow{AC}=(-7;\,-4)\end{array}\right\}\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\iff 7(x-4)+4(y-2)=0\iff 7x+4y=36$$

Tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases}6x+y=35\\ 7x+4y=36\end{cases}\iff\begin{cases}x=\dfrac{104}{17}\\ y=\dfrac{-29}{17}\end{cases}\Rightarrow H\left(\dfrac{104}{17};\,\dfrac{-29}{17}\right)$.

Gọi A'(x; y)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AA'}=(x-5;\,y-5)\\ \overrightarrow{BC}=(-6;\,-1)\end{array}\right\}\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{BC}\iff 6(x-5)+(y-5)=0\iff 6x+y=35$$

$\overrightarrow{BA'}=(x-4;\,y-2)$; $\overrightarrow{BA'}$ cùng phương với $BC\iff 6(y-2)=x-4\iff x-6y=-8$

Tọa độ A' là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-6y=-8\\ 6x+y=35\end{cases}\iff\begin{cases}x=\dfrac{202}{37}\\ y=\dfrac{83}{37}\end{cases}\Rightarrow A'\left(\dfrac{202}{37};\dfrac{83}{37}\right)$.

Bài 9. Cho tam giác ABC với A(1; 5), B(–4; –5), C(4; –1).

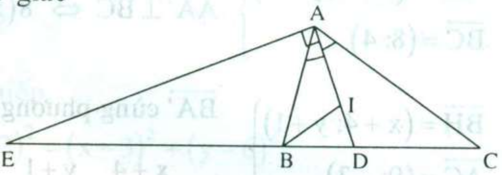
a. Tìm tọa độ chân các đường phân giác trong và ngoài của góc A trên cạnh BC.

b. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Giải

a. $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sqrt{25+100}}{\sqrt{9+36}}=\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{45}}=\dfrac{5}{3}$.

Gọi D(x; y) là chân đường phân giác trong góc A trên cạnh BC: $\dfrac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}}=-\dfrac{5}{3}$



$$D:\begin{cases} x=\dfrac{-4+\dfrac{5}{3}.4}{1+\dfrac{5}{3}}=1 \\ y=\dfrac{-5+\dfrac{5}{3}.(-1)}{1+\dfrac{5}{3}}=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(1;-\dfrac{5}{2}\right).$$

Gọi E (x; y) là chân đường phân giác ngoài góc A trên cạnh BC:

$$\dfrac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EC}}=\dfrac{5}{3}$$

$$E:\begin{cases} x=\dfrac{-4-\dfrac{5}{3}.4}{1-\dfrac{5}{3}}=16 \\ y=\dfrac{-5-\dfrac{5}{3}.(-1)}{1-\dfrac{5}{3}}=5 \end{cases} \Rightarrow E(16;5).$$

b. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC: I là chân của đường phân giác trong góc B trên cạnh AD

$$\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{\sqrt{(1+4)^2+\left(-5+\dfrac{5}{2}\right)^2}}{\sqrt{5^2+10^2}}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{125}{4}}}{\sqrt{125}}=\dfrac{1}{2}$$

$$\frac{\overline{ID}}{\overline{IA}}=-\frac{1}{2};\ I\begin{cases} x=\dfrac{1+\frac{1}{2}.1}{1+\frac{1}{2}}=1 \\ y=\dfrac{-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}.5}{1+\frac{1}{2}}=0 \end{cases} \Rightarrow I(1;0).$$

♦ Lời bình: đây là phương pháp tìm tâm đường tròn nội tiếp trong một tam giác đơn giản, dễ làm nhất (nếu biết tọa độ ba đỉnh của tam giác)

Bài 10. Cho tam giác ABC có $A(1;-1)$, $B(5;-3)$; đỉnh $C \in Oy$ và trọng tâm $G \in Ox$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Giải

Gọi $C(0;c)$, $G(x;y)$, $G \in Ox \Leftrightarrow y=0$

Theo hệ thức tọa độ trọng tâm: $\dfrac{1+5+0}{3}=x \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow G(2;0)$.

Cũng theo hệ thức tọa độ trọng tâm: $\dfrac{-1-3+c}{3}=0 \Leftrightarrow c=4 \Rightarrow C(0;4)$.

Bài 11. a, b, c là 3 số thực tùy ý. Chứng minh: $\sqrt{(a-b)^2+c^2}+\sqrt{(a+b)^2+c^2}\ge 2\sqrt{a^2+c^2}$

Giải

Gọi $\begin{cases}\vec{u}=(a-b;c)\\ \vec{v}=(a+b;c)\end{cases} \Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=2a+2c$.

$|\vec{u}|=\sqrt{(a-b)^2+c^2}$; $|\vec{v}|=\sqrt{(a+b)^2+c^2} \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}|=2\sqrt{a^2+c^2}$

Từ bất đẳng thức $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}| \Rightarrow$ đpcm.

♦ Lời bình: Cho biết thêm một phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng việc sử dụng các bất đẳng thức vectơ và bất đẳng thức tam giác: $|\vec{a}|+|\vec{b}|\ge|\vec{a}+\vec{b}|$

Vấn đề cần suy nghĩ, sáng tạo là chọn các vectơ thích hợp phục vụ cho bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 12. x là một số thực bất kỳ, chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}\ge\sqrt{29}$$

Giải

Gọi $\vec{a}=(x-1;2)$, $\vec{b}=(-x-1;3) \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=(-2;5)$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(x-1)^2+4} = \sqrt{x^2-2x+5};\ \left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-x-1)^2+9} = \sqrt{x^2+2x+10}$$

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{(-2)^2+5^2} = 29$. Từ bất đẳng thức $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right| \ge \left|\vec{a}+\vec{b}\right| \Rightarrow$ đpcm.

◆ Lời bình: Cho biết thêm một phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng việc sử dụng các bất đẳng thức vectơ và bất đẳng thức tam giác: $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| \ge \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

Vấn đề cần suy nghĩ, sáng tạo là chọn các vectơ thích hợp phục vụ cho bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 13. Chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt{\cos^4\alpha+\cos^4\beta+\sin^2\alpha+\sin^2\beta} \ge \sqrt{2}$.

Giải

Gọi $\vec{a} = \left(\cos^2\alpha; \cos^2\beta\right), \vec{b} = \left(\sin^2\alpha; 0\right), \vec{c} = \left(0; \sin^2\beta\right), \vec{d} = (1;1) = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$$\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{c}\right| = \sqrt{\cos^4\alpha+\cos^4\beta+\sin^2\alpha+\sin^2\beta} \ge \left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right| = \sqrt{2}.$$

◆ Lời bình: Cho biết thêm một phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng việc sử dụng các bất đẳng thức vectơ và bất đẳng thức tam giác: $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| \ge \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

Vấn đề cần suy nghĩ, sáng tạo là chọn các vectơ thích hợp phục vụ cho bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 14. Cho $\vec{a} = \left(1; 2\sqrt{2}\right),\ \vec{b} = \left(\sqrt{x}; \sqrt{2-x}\right)\ \ (0 \le x \le 2)$

a. Tính $\left|\vec{a}\right|,\ \left|\vec{b}\right|,\ \vec{a}.\vec{b}$

b. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $y = \sqrt{x} + 4\sqrt{1-\frac{x}{2}}$.

Giải

a. $\left|\vec{a}\right| = 3,\ \left|\vec{b}\right| = 2,\ \vec{a}.\vec{b} = \sqrt{x} + 2\sqrt{2}.\sqrt{2-x} = \sqrt{x} + 4\sqrt{1-\frac{x}{2}}$.

b. $\sqrt{x} + 4\sqrt{1-\frac{x}{2}} = \sqrt{2}.\sqrt{\frac{x}{2}} + 4\sqrt{1-\frac{x}{2}} \le \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+4^2}.\sqrt{\frac{x}{2}+1-\frac{x}{2}} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ y có giá trị lớn nhất là $3\sqrt{2}$.

y được xác định trên [0; 2] $\Rightarrow$ khi x = 2 thì $y_{\min} = \sqrt{2}$.

◆ Lời bình: Cho biết thêm một phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng việc sử dụng các bất đẳng thức vectơ và bất đẳng thức tam giác: $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| \ge \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

Vấn đề cần suy nghĩ, sáng tạo là chọn các vectơ thích hợp phục vụ cho bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 15. Cho 3 số dương a, b, c (a > c; b > c). Chứng minh: $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$

Giải

Gọi $\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\left(\sqrt{a-c};\ \sqrt{c}\right)\\ \vec{v}=\left(\sqrt{c};\ \sqrt{b-c}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\vec{u}.\vec{v}\right|=\sqrt{c\left(a-c\right)}+\sqrt{c\left(b-c\right)}$

$\left.\begin{array}{l}\left|\vec{u}\right|=\sqrt{a}\\ \left|\vec{v}\right|=\sqrt{b}\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|=\sqrt{ab}$. Từ $\left|\vec{u}.\vec{v}\right|\le\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\Rightarrow$ đpcm.

◆ Lời bình: Cho biết thêm một phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng việc sử dụng các bất đẳng thức vectơ và bất đẳng thức tam giác: $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

Vấn đề cần suy nghĩ, sáng tạo là chọn các vectơ thích hợp phục vụ cho bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 16. x, y, z bất kỳ. Chứng minh rằng: $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\ge\sqrt{y^2+yz+z^2}$.

Giải

$$\text{Gọi}\left.\begin{array}{l}A(x;\,0)\\ B\left(-\dfrac{y}{2};\ \dfrac{y\sqrt{3}}{2}\right)\\ C\left(-\dfrac{z}{2};\ \dfrac{-z\sqrt{3}}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}AB=\sqrt{\left(-\dfrac{y}{2}-x\right)^2+\left(\dfrac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2+xy+y^2}\\ AC=\sqrt{\left(-\dfrac{z}{2}-x\right)^2+\left(-\dfrac{z\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2+xz+z^2}\\ BC=\sqrt{\left(\dfrac{y-z}{2}\right)^2+\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}(z+y)\right]^2}=\sqrt{y^2+yz+z^2}\end{array}$$

Từ AB + AC ≥ BC ⇒ đpcm.

◆ Lời bình: Cho biết thêm một phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng việc sử dụng các bất đẳng thức vectơ và bất đẳng thức tam giác: $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

Vấn đề cần suy nghĩ, sáng tạo là chọn các vectơ thích hợp phục vụ cho bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 17. Cho M(1; 1 – cosα), N(3; 4).

a. Tính OM, MN.

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của $y=\sqrt{\cos^2\alpha-2\cos\alpha+2}+\sqrt{\cos^2\alpha+6\cos\alpha+13}$.

Giải

a. $OM=\sqrt{1^2+\left(1-\cos\alpha\right)^2}=\sqrt{\cos^2\alpha-2\cos\alpha+2}$

$MN=\sqrt{\left(3-1\right)^2+\left(4-1+\cos\alpha\right)^2}=\sqrt{\cos^2\alpha+6\cos\alpha+13}$

b. ON = 5. Trong tam giác OMN: OM + MN ≥ ON ⇒ y có giá trị nhỏ nhất bằng 5.

◆ Lời bình: Cho biết thêm một phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng việc sử dụng các bất đẳng thức vectơ và bất đẳng thức tam giác: $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| \ge \left|\vec{a} + \vec{b}\right|$

Vấn đề cần suy nghĩ, sáng tạo là chọn các vectơ thích hợp phục vụ cho bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{x^2 - 2px + 2p^2} + \sqrt{x^2 - 2qx + 2q^2} \quad (p, q \in R).$$

Giải

Gọi $\vec{a} = (x - p; |p|)$, $\vec{b} = (q - x; |q|) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (q - p; |q| + |p|)$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(x-p)^2 + p^2} = \sqrt{x^2 - 2px + 2p^2}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(q-x)^2 + q^2} = \sqrt{x^2 - 2qx + 2q^2}$$

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{(q-p)^2 + (|q| + |p|)^2}$$

Từ $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| \ge \left|\vec{a} + \vec{b}\right| \Rightarrow$ đpcm.

◆ Lời bình: Cho biết thêm một phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng việc sử dụng các bất đẳng thức vectơ và bất đẳng thức tam giác: $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| \ge \left|\vec{a} + \vec{b}\right|$

Vấn đề cần suy nghĩ, sáng tạo là chọn các vectơ thích hợp phục vụ cho bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 19. Chứng minh các tam giác ABC dưới đây là tam giác cân

a. A(−1; 1), B(1; 3), C(2; 0). b. A(−2; 2), B(6; 6), C(2; −2)

Giải

a. Cân tại C: $AC = BC = \sqrt{10}$. b. Cân tại B: $AB = BC = 4\sqrt{5}$

Bài 20. Chứng minh các tam giác ABC dưới đây là tam giác vuông:

a. A(10; 5), B(3; 2), C(6; −5). b. A(−2; 8), B(−6; 1), C(0; 4).

Giải

a. Vuông tại B: $\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0\right)$. b. Vuông tại C: $\left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0\right)$.

Bài 21. Cho 4 điểm: A(1; 4), B(4; 1), C(1; −5), D(−5; 1). Chứng minh rằng ABCD là hình thang cân.

Giải

a. $\overrightarrow{AB} = (3; -3)$, $\overrightarrow{BC} = (-3; -6)$, $\overrightarrow{CD} = (-6; 6)$, $\overrightarrow{AD} = (-6; -3)$

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = -2;\ BC = AD = 3\sqrt{5} \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 22. Cho 4 điểm: A(–1; 4), B(5; 6), C(6; 3), D(0; 1). Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp được trong một đường tròn

Giải

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-4) = (x-5)^2 + (y-6)^2 \\ (x+1)^2 + (y-4)^2 = (x-6)^2 + (y-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 - 8y + 16 = -10x + 25 - 12y + 36 \\ 2x + 1 - 8y + 16 = -12x + 36 - 6y + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 4y = 44 \\ 14x - 2y = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 11 \\ 7x - y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} AI^2 &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}+1\right)^2 + \left(\frac{7}{2}-4\right)^2} = \frac{\sqrt{49+1}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ DI^2 &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{7}{2}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{25+25}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ D nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC $\Rightarrow$ đpcm

Bài 23. Cho A(4; 3), B(2; 7), C(–3; –8)

a. Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

b. Chứng tỏ $\overline{IH} = 3\overline{IG}$.

c. AD là đường kính của đường tròn ABC. Chứng minh BHCD là hình bình hành.

Giải

a. $G\left(\dfrac{4+2-3}{3};\dfrac{3+7-8}{3}\right) : G\left(1;\dfrac{2}{3}\right)$

Gọi H(x; y) là trực tâm của tam giác ABC:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= (x-4;y-3) \\ \overrightarrow{BC} &= (-5;-15) \end{aligned}\right\} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$$

$\Leftrightarrow -5(x-4) - 15(y-3) = 0 \Leftrightarrow x - 4 + 3(y-3) = 0 \Leftrightarrow x + 3y = 13$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{BH} &= (x-2;y-7) \\ \overrightarrow{AC} &= (-7;-11) \end{aligned}\right\} \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$$

$\Leftrightarrow 7(x-2) + 11(y-7) = 0 \Leftrightarrow 7x + 11y = 91$

Tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 7x + 11y = 91 \\ x + 3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{130}{10} = 13 \\ y = \dfrac{0}{10} = 0 \end{cases} \Rightarrow H(13; 0)$

Gọi I(x; y) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác:

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = (x-2)^2 + (y-7)^2 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = (x+3)^2 + (y+8)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 16 - 6y + 9 = -4x + 4 - 14y + 49 \\ -8x + 16 - 6y + 9 = 6x + 9 + 16y + 64 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 8y = 28 \\ -14x - 22y = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -7 \\ 7x + 11y = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I(-5; 1)$$

b. $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{IH} = (18; -1) \\ \overrightarrow{IG} = \left(6; -\dfrac{1}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$

c. $\begin{cases} x_D = -10 - 4 = -14 \\ y_D = 2 - 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow D(-14; -1)$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{HC} = (-16; -8) \\ \overrightarrow{BD} = (-16; -8) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow$ BHCD là hình bình hành

Bài 24. Cho tam giác ABC có A(5; 4), B(−1; 1), C(3; −2). M là điểm lưu động thỏa $\alpha.\overrightarrow{MA} + \beta.\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (α, β là số thực thay đổi không đồng thời bằng 0).

Định M để $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

Giải

Gọi M(x; y): $\overrightarrow{MA} = (5 - x; 4 - y)$, $\overrightarrow{MB} = (-1 - x; 1 - y)$

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha(5-x); \alpha(4-y)) + (\beta(-1-x); \beta(1-y)) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(5-x) - \beta(1+x) = 0 \\ \alpha(4-y) + \beta(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \\ y = \dfrac{4\alpha + \beta}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MA} = \left(5 - \frac{5\alpha - \beta}{\alpha + \beta}; 4 - \frac{4\alpha + \beta}{\alpha + \beta}\right) = \left(\frac{6\beta}{\alpha + \beta}; \frac{3\beta}{\alpha + \beta}\right)$$

$$\overrightarrow{MC}=\left(3-\frac{5\alpha-\beta}{\alpha+\beta};-2-\frac{4\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right)=\left(\frac{-2\alpha+4\beta}{\alpha+\beta};\frac{-6\alpha-3\beta}{\alpha+\beta}\right)$$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\left(\frac{-2\alpha+10\beta}{\alpha+\beta};\frac{-6\alpha}{\alpha+\beta}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{\left(\frac{-2\alpha+10\beta}{\alpha+\beta}\right)^2+\left(\frac{-6\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right| \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \left(\frac{-2\alpha+10\beta}{\alpha+\beta}\right)^2+\left(\frac{-6\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \text{ nhỏ nhất}$$

$$\left(\frac{-2+10\beta}{\alpha+\beta}\right)^2+\left(\frac{-6\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2=\frac{40\left(\alpha^2-\alpha\beta+\frac{5}{2}\beta^2\right)}{(\alpha+\beta)^2}$$

$$\alpha^2-\alpha\beta+\frac{5}{2}\beta^2=\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\beta^2\geq\frac{9}{4}\beta^2 \text{ có đẳng thức khi } \alpha=\frac{\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{40}{(\alpha+\beta)^2}\left(\alpha^2-\alpha\beta+\frac{9}{4}\beta^2\right)\geq\frac{40.\frac{9}{4}\beta^2}{\left(\frac{\beta}{2}+\beta\right)^2}=40$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|\min=40\Leftrightarrow\alpha=\frac{\beta}{2}$$

$$\text{Lúc này: }\begin{cases} x=\dfrac{\frac{5\beta}{2}-\beta}{\frac{\beta}{2}+\beta}=\dfrac{\frac{3\beta}{2}}{\frac{3\beta}{2}}=1\\[2ex] y=\dfrac{\frac{4\beta}{2}+\beta}{\frac{\beta}{2}+\beta}=\dfrac{6\frac{\beta}{2}}{3\frac{\beta}{2}}=2\end{cases}\Rightarrow M(1;2)$$

Bài 25*. Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. I là tâm đường tròn nội tiếp, J là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC.

a. Chứng minh: $a.\overrightarrow{IA}+b.\overrightarrow{IB}+c.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

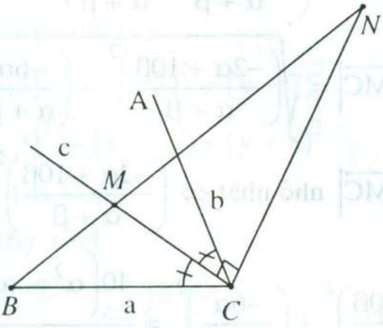
$$-a.\overrightarrow{JA}+b.\overrightarrow{JB}+c.\overrightarrow{JC}=\vec{0}$$

b. Áp dụng: Cho tam giác ABC có A(0; –4), B(–5; 6), C(3; 2). Tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp và tọa độ tâm J của đường tròn bàng tiếp trong góc A.

Giải

Trước hết, chứng minh hai công thức phụ về phân giác trong và phân giác ngoài của một góc C trong tam giác ABC (hình vẽ)

* CM: phân giác trong góc C



$$\frac{MA}{BM}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{MA+MB}{BM}=\frac{b+a}{a}$$

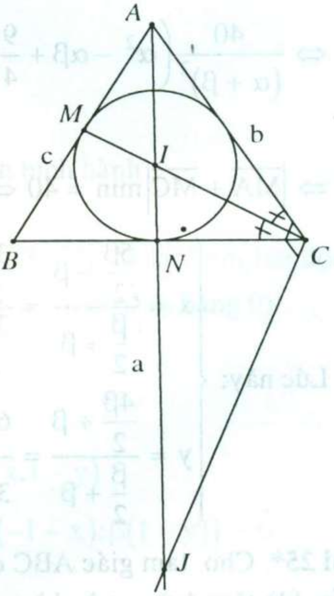
$$\Rightarrow\frac{AB}{BM}=\frac{a+b}{a}\Rightarrow\frac{MA}{AB}=\frac{b}{a+b}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}AM=\dfrac{bc}{a+b}\\ \overrightarrow{AM}=\dfrac{b}{a+b}.\overrightarrow{AB}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)$$

$$=\overrightarrow{CA}\left(1-\frac{b}{a+b}\right)+\frac{b}{a+b}.\overrightarrow{CB}=\frac{a}{a+b}.\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}.\overrightarrow{CB}\quad(1)$$

* CN: phân giác ngoài góc C



$$\frac{NB}{NA}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{NB-NA}{NA}=\frac{a-b}{b}\Leftrightarrow\frac{AB}{NA}=\frac{a-b}{b}$$

$$\Rightarrow\frac{NB}{AB}=\frac{a}{a-b}\Rightarrow\begin{cases}NB=\dfrac{a.c}{a-b}\\ \overrightarrow{NB}=\dfrac{a}{a-b}.\overrightarrow{AB}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{NA}{AB}\quad\frac{b}{a-b}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AN}=-\frac{b}{a-b}.\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AN}\text{ trái chiều }\overrightarrow{AB}\right)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}$$

$$=\overrightarrow{CA}-\frac{b}{a-b}.\overrightarrow{AB}$$

$$=\overrightarrow{CA}-\frac{b}{a-b}.\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)$$

$$=\overrightarrow{CA}\left(1+\frac{b}{a-b}\right)-\frac{b}{a-b}.\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CN}=\frac{a}{a-b}\overrightarrow{CA}-\frac{b}{a-b}.\overrightarrow{CB}\quad(2)$$

a. Áp dụng (1) vào tam giác ACM với AI là phân giác trong A:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{AM}{MB} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{AM + MB}{MB} = \frac{a+b}{a} \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{a+b}{a} \\ \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow AM = \frac{bc}{b+c}; \overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} \end{array}\right)$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{AC}{AC + AM}.\overrightarrow{AM} + \frac{AM}{AC + AM}.\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{b}{b + \frac{bc}{a+b}}.\frac{b}{a+b}.\overrightarrow{AB} + \frac{\frac{bc}{a+b}}{b + \frac{bc}{a+b}}.\overrightarrow{AC} = \frac{b}{a+b+c}.\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}.\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a+b+c}\left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}\right) + \frac{c}{a+b+c}\left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{AI} = b.\overrightarrow{IB} - b\overrightarrow{IA} + c\overrightarrow{IC} - c\overrightarrow{IA}$$

$$\Leftrightarrow -a.\overrightarrow{IA} - b.\overrightarrow{IA} - c.\overrightarrow{IA} = b.\overrightarrow{IB} - b.\overrightarrow{IA} + c.\overrightarrow{IC} - c.\overrightarrow{IA}$$

$$\Leftrightarrow a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0} \qquad (3)$$

Áp dụng (2) vào tam giác CAN với CJ là phân giác góc ngoài C:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{CN}{NB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{CN + NB}{C} \Rightarrow \frac{BC}{NB} = \frac{b+c}{C} \Rightarrow \frac{CN}{BC} = \frac{b}{b+c} \\ \Rightarrow CN = \frac{ab}{b+c} \text{ và } \overrightarrow{CN} = \frac{b}{b+c}.\overrightarrow{CB} \end{array}\right)$$

$$CJ = \frac{b}{b - CN}.CN - \frac{CN}{b - CN}.\overrightarrow{CA} = \frac{b}{b - \frac{ab}{b+c}}.\frac{b}{b+c}.\overrightarrow{CB} - \frac{\frac{ab}{b+c}}{b - \frac{ab}{b+c}}.\overrightarrow{CA}$$

$$-\overrightarrow{JC} = \frac{b}{b+c-a}.\overrightarrow{CB} - \frac{a}{b+c-a}.\overrightarrow{CA}$$

$$\Leftrightarrow -(b+c-a).\overrightarrow{JC} = b\left(\overrightarrow{JB} - \overrightarrow{JC}\right) - a\left(\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JC}\right)$$

$$\Leftrightarrow -b.\overrightarrow{JC} - c.\overrightarrow{JC} + a.\overrightarrow{JC} = b.\overrightarrow{JB} - b\overrightarrow{JC} - a.\overrightarrow{JA} + a\overrightarrow{JC}$$

$$\Leftrightarrow -a\overrightarrow{JA} + b.\overrightarrow{JB} + c.\overrightarrow{JC} = \vec{0}. \qquad (4)$$

b. Áp dụng (3) và (4) vào tam giác ABC:

A(0; –4), B(–5; 6), C(3; 2)

$BC = a = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{30} = 4\sqrt{5}$

$AC = b = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
DYL / 13016 / 13

$AB = c = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

Gọi I(x; y) là tâm đường tròn nội tiếp:

$\overrightarrow{IA} = (-x;-4-y) \Rightarrow a.\overrightarrow{IA} = 4\sqrt{5}.(-x;-4-y) = \left(-4\sqrt{5}x;-16\sqrt{5};-4\sqrt{5}y\right)$

$\overrightarrow{IB} = (-5-x;6-y) \Rightarrow b.\overrightarrow{IB} = 3\sqrt{5}(-5-x;6-y)$

$= \left(-15\sqrt{5} - 3\sqrt{5}x;18\sqrt{5} - 3\sqrt{5}y\right)$

$\overrightarrow{IC} = (3-x;2-y) \Rightarrow c.\overrightarrow{IC} = 5\sqrt{5}(3-x;2-y)$

$= \left(15\sqrt{5} - 5\sqrt{5}x;10\sqrt{5} - 5\sqrt{5}y\right)$

$\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \left(-12\sqrt{5}x;12\sqrt{5} - 12\sqrt{5}y\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1)$

Gọi J(x; y) là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A

$\overrightarrow{JA} = (-x;-4-y) \Rightarrow -a\overrightarrow{JA} = -4\sqrt{5}(-x;-4-y) = \left(4\sqrt{5}x;16\sqrt{5} + 4\sqrt{5}y\right)$

$\overrightarrow{JB} = \left(-5-x;6-y\right) \Rightarrow b.\overrightarrow{JB} = 3\sqrt{5}(-5-x;6-y)$

$= \left(-15\sqrt{5} - 3\sqrt{5}x;18\sqrt{5} - 3\sqrt{5}y\right)$

$\overrightarrow{JC} = (3-x;2-y) \Rightarrow c.\overrightarrow{JC} = 5\sqrt{5}(3-x;2-y)$

$= \left(15\sqrt{5} - 5\sqrt{5}x;10\sqrt{5} - 5\sqrt{5}y\right)$

$\overrightarrow{JA} + b.\overrightarrow{JB} + c.\overrightarrow{JC} = \left(-4\sqrt{5}x;44\sqrt{5} - 4\sqrt{5}y\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 11 \end{cases} \Rightarrow J(0;11)$

♦ Lời bình: Lời giải là một cách sử dụng các phép toán vectơ thuần thục nhất.

Bài 26. Chứng minh bất đẳng thức:

$\sqrt{x^2 + 4y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 4y^2 - 2x - 12y + 10} \geq 5 \ (x, y \in R)$.

Giải

Gọi $\left.\begin{matrix} \vec{u} = (x+3;2y) \\ \vec{v} = (1-x;3-2y \end{matrix}\right\} \vec{u} + \vec{v} = (4;3) \Rightarrow \left|\vec{u} + \vec{v}\right| = 5$

$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{(x+3)^2 + 4y^2} = \sqrt{x^2 + 6x + 5 + 4y^2}$

$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(1-x)^2 + (3-2y)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 4y^2 - 12y + 9}$

Từ $\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| \geq \left|\vec{u} + \vec{v}\right| \Rightarrow$ đpcm.

Bài 27. Chứng minh bất đẳng thức: $\left|3x^2 + 8x - 3\right| \le 5(x^2 + 1)$.

Giải

Gọi $\vec{u} = (3;4)$

$\vec{v} = \left(x^2 - 1; 2x\right)$

$\vec{u}.\vec{v} = 3x^2 - 3 + 8x$

$\left|\vec{u}\right| = 5$

$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(x^2 - 1\right)^2 + 4x^2} = x^2 + 1$

Từ $\left|\vec{u}.\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| \Rightarrow$ đpcm

Bài 28. Cho hệ trục tọa độ xiên Oxy, vectơ đơn vị là $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$; $\left(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oy}\right) = \theta$ với $0 < \theta < 2\pi$ và $\theta \ne \pi$.

Cho $\vec{a} = (a_1;a_2)$, $\vec{b} = (b_1;b_2)$ và điểm M $(x_M;y_M)$ với $\left(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{OM}\right) = \lambda$

$\overrightarrow{OM} = x_M.\overrightarrow{e_1} + y_M.\overrightarrow{e_2}$

Đặt $\varphi(x; y) = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta$

$\varphi'_x\ (x; y) = 2(x + y\cos\theta)$

$\varphi'_y\ (x; y) = 2(y + y\cos\theta)$

a. Chứng minh:

α. $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1).\cos\theta$

$$= \frac{1}{2}\left[a_1.\varphi'_x(b_1;b_2) + a_2.\varphi'_y(b_1;b_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[b_1.\varphi'_x(a_1;a_2) + b_2.\varphi'_y(a_1,a_2)\right]$$

β. $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\varphi(a_1;a_2)}$

b. Chứng minh $\begin{cases} x_M = \dfrac{OM.\sin(\theta - \lambda)}{\sin\theta} \\ y_M = \dfrac{OM.\sin\lambda}{\sin\theta} \end{cases}$

c. Chứng minh: $\sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.\sin\theta}{\sqrt{\varphi(a_1;a_2)}.\sqrt{\varphi(b_1;b_2)}}$

Giải

Xem hình bên

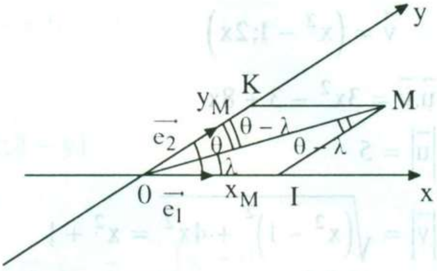
a. α. Nếu $\vec{a} = (a_1;a_2)$ thì $\vec{a} = a_1.\overrightarrow{e_1} + a_2.\overrightarrow{e_2}$

Tương tự: $\vec{b} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2.\overrightarrow{e_2}$

Nhớ rằng: $\overrightarrow{e_1^2} = \overrightarrow{e_2^2} = 1$

$$\left|\overrightarrow{e_1}\right| = \left|\overrightarrow{e_2}\right| = 1$$

$$\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} = \left|\overrightarrow{e_1}\right|.\left|\overrightarrow{e_2}\right|.\cos\theta = \cos\theta$$



$$\vec{a}.\vec{b} = \left(a_1.\overrightarrow{e_1} + a_2.\overrightarrow{e_2}\right)\left(b_1.\overrightarrow{e_1} + b_2.\overrightarrow{e_2}\right)$$

$$= a_1b_1.\overrightarrow{e_1^2} + a_2.b_2\overrightarrow{e_2^2} + a_1.b_2.\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} + a_2b_2.\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2}$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\cos\theta \quad (1)$$

- $a_1.\varphi'_x(b_1;b_2) = a_1.2(b_1 + b_2\cos\theta) = 2a_1b_1 + 2a_1.b_2.\cos\theta$

  $a_2.\varphi'_y(a_1;a_2) = a_2.2(b_2 + b_1\cos\theta) = 2a_2b_2 + 2a_1b_2.\cos\theta$

  $\Rightarrow a_1\overrightarrow{e'_x}(b_1;b_2) + a_2.\varphi'_y(b_1;b_2) = 2\left[a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\cos\theta\right]$

  $\Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left[a_1\varphi'_x(b_1;b_2) + a_2\varphi'_y(b_1 + b_2)\right]$

- $b_1\varphi'_x(a_1;a_2) = b_1.2(a_1 + a_2\cos\theta) = 2a_1b_1 + 2a_2b_1.\cos\theta$

  $b_2.\varphi'_y(a_1;a_2) = b_2.2(a_2 + a_1\cos\theta) = 2a_2b_2 + 2a_1b_2.\cos\theta$

  $\Rightarrow b_1\varphi'_x(a_1;a_2) + b_2.\varphi'_y(a_1;a_2) = 2\left[a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1).\cos\theta\right]$

  $\Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1).\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left[b_1.\varphi'_x(a_1;a_2) + b_2.\varphi'_y(a_1;a_2)\right]$

  ⇒ Điều phải chứng minh.

β. $$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{a^2} &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1.a_2.\cos\theta\\ \varphi(a_1;a_2) &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2.\cos\theta\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\varphi(a_1;a_2)}$$

b. Áp dụng định lí sin vào tam giác OMI trên hình vẽ:

$OI = x_M$; $\widehat{OMI} = \theta - \lambda$; $IM = OK = y_M$

$$\frac{x_M}{\sin(\theta - \lambda)} = \frac{OM}{\sin\left[180^0 - (\lambda + \theta - \lambda)\right]} = \frac{OM}{\sin\theta} \Rightarrow x_M = \frac{OM.\sin(\theta - \lambda)}{\sin\theta}$$

$$\frac{y_M}{\sin\lambda} = \frac{OM}{\sin\theta} \Rightarrow y_M = \frac{OM.\sin\lambda}{\sin\theta}.$$

c. Từ các hệ thức đã chứng minh ở trên:

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1).\cos\theta$$

$$\left|\vec{a}\right|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\theta$$

$$\left|\vec{b}\right|^2 = b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2.\cos\theta$$

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1).\cos\theta}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\theta}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2\cos\theta}}$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 1 - \cos^2\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

$$= 1 - \frac{\left[a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1).\cos\theta\right]^2}{\left(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\theta\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2\cos\theta\right)}$$

$$= \frac{(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\theta)(b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2\cos\theta) - \left[a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_2)\cos\theta\right]^2}{(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\theta)(b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2\cos\theta)}$$

$$= \frac{(a_1^2b_1^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + 2b_1^2a_1a_2\cos\theta + 2a_2^2b_1b_2\cos\theta}{\varphi(a_1;a_2).\varphi(b_1;b_2)}$$

$$+ \frac{2a_2^2b_1b_2\cos\theta + 2a_2^2b_1b_2\cos\theta + 4a_1a_2b_1b_2\cos^2\theta}{\varphi(a_1;a_2).\varphi(b_1;b_2)}$$

$$- \frac{(a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2\cos^2\theta + 2a_1a_2b_1b_2}{\varphi(a_1;a_2).\varphi(b_1;b_2)}$$

$$+ \frac{2a_1b_1(a_1b_2 + a_2b_1)\cos\theta + 2a_2b_2(a_1b_2 + a_2b_1)\cos\theta}{\varphi(a_1;a_2).\varphi(b_1;b_2)}$$

$$= \frac{a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - (a_1b_2 - a_2b_1)^2(1 - \sin^2\theta) - 2a_1a_2b_1b_2}{\varphi(a_1;a_2).\varphi(b_1;b_2)}$$

$$= \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2\sin^2\theta}{\varphi(a_1;a_2).\varphi(b_1;b_2)} \Rightarrow \sin\left(\vec{a};\vec{b}\right) = \frac{\left|a_1b_2 - a_2b_1\right|.\sin\theta}{\sqrt{\varphi(a_1;a_2)}.\sqrt{\varphi(b_1;b_2)}} \text{ (đpcm).}$$

♦ Lời bình: Là một trong những bài có biến đổi đại số, lượng giác và kĩ thuật tính toán tốt. Cần xem kĩ!

Chương II. ĐƯỜNG THẲNG

I. TÓM TẮT GIÁO KHOA

- Phương trình tổng quát của đường thẳng: $Ax + By + C = 0$ trong đó $\vec{n} = (A;B)$: vectơ pháp tuyến, $\vec{a} = (-B;A)$: vectơ chỉ phương.

  Hệ số góc: $k = -\dfrac{A}{B}$. Tung độ gốc: $-\dfrac{C}{B}$

- Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;\ y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1;a_2) \neq \vec{0}$: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

- Phương trình chính tắc: $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2}$ $(= t)$

- $(\Delta_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0$

  $(\Delta_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0$

  * Nếu $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$: (Δ_1) cắt (Δ_2)

  * Nếu $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$: $(\Delta_1) // (\Delta_2)$

  * Nếu $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$: $(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$

  * Công thức tính góc của (Δ_1) và (Δ_2)

$$(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

  * Công thức tính khoảng cách từ điểm $M_1(x_1;\ y_1)$ đến đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$:

$$d(M_1, \Delta) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

  * Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi (Δ_1) và (Δ_2):

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$$

II. ĐỀ TOÁN VÀ LỜI GIẢI:

❖ **DẠNG 1:** Tìm phương trình của tập hợp điểm M(x; y) thỏa mãn điều kiện (A).

Cách giải: Từ (A), tìm ra liên quan trực tiếp giữa x, y rồi chuyển về phương trình $F(x; y) = 0$

Bài 29. Cho hai điểm $A(4; 1)$, $B(0; 3)$.

a. Tìm phương trình đường tròn đường kính AB.

b. Tìm phương trình đường thẳng qua $C(1; 2)$ và vuông góc với AB.

c. Tìm phương trình tham số của đường thẳng qua $D(1; -2)$ và song song với AB.

Giải

a. Đường tròn đường kính AB có tâm I là trung điểm AB: $I(2; 2)$ có bán kính $R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 4} = \sqrt{5}$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm tùy ý thuộc đường tròn $\Leftrightarrow IM = R$

$\Leftrightarrow IM^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$ là phương trình cần tìm.

b. $\overrightarrow{AB} = (-4;2)$ cùng phương với $\vec{n} = (2;-1)$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc đường thẳng (Δ) qua $C(1; 2)$ và vuông góc với AB: $\overrightarrow{CM} = (x - 1;y - 2)$

$\overrightarrow{CM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow 2(x - 1) - (y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0$ là phương trình đường thẳng cần tìm.

c. Chọn vectơ $\vec{n} = (2; -1)$ là vec tơ chỉ phương cho đường thẳng (d) qua $D(1; -2)$ và song song với AB.

$\forall M\ (x; y) \in d$, ta đều có: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ là phương trình tham số của đường thẳng d qua $D(1; -2)$ và song song với AB

Bài 30. Cho $A(1; 2)$, $B(-3; 1)$, $C(4; -2)$. Lập phương trình tập hợp các điểm M sao cho:

a. $MA^2 + MB^2 = MC^2$. b. $\left|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MC}\right|$.

Giải

a. Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc tập hợp các điểm M thỏa $MA^2 + MB^2 = MC^2$

$MA^2 = (1 - x)^2 + (2 - y)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$

$MB^2 = (-3 - x)^2 + (1 - y)^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1$

$MC^2 = (4 - x)^2 + (-2 - y)^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4$

$MA^2 + MB^2 + MC^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y + 15 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 12x - 10y - 5 = 0.$

b. Gọi M(x; y) là điểm thuộc tập hợp các điểm M thỏa $\left|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MC}\right|$

$\overrightarrow{MA} = (1 - x; 2 - y) \Rightarrow 3\overrightarrow{MA} = (3 - 3x; 6 - 3y)$

$\overrightarrow{MB} = (-3 - x); 1 - y)$

$3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = (6 - 2x; 5 - 2y)$

$\overrightarrow{MC} = (4 - x; -2 - y)$

$\left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MC}\right|$.

$\Leftrightarrow (6 - 2x)^2 + (5 - 2y)^2 = (4 - x)^2 + (-2 - y)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 36 - 20y + 25 = 16 - 8x + x^2 + 4 + 4y + y^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 = 16x - 24x + 41 = 0.$

Bài 31. Cho A(1; 3), B(2; –1), C(–3; –2). Lập phương trình tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = 0$ (*)

Giải

Gọi M(x; y) là điểm bất kì thuộc tập hợp điểm M thỏa điều kiện (*)

$\overrightarrow{MA} = (1 - x; 3 - y)$

$\overrightarrow{MB} = (2 - x; -1 - y)$

$\overrightarrow{MC} = (-3 - x; -2 - y)$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (1 - x)(2 - x) + (3 - y)(-1 - y) = 2 - 3x + x^2 - 3 - 2y + y^2$

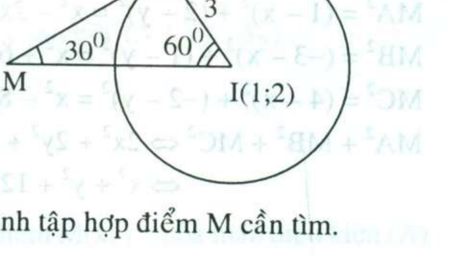
$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = (2 - x)(-3 - x) + (1 + y)(2 + y) = -6 + x + x^2 + 2 + 3y + y^2$

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = (1 - x)(-3 - x) + (3 - y)(-2 - y) = -3 + 2x + x^2 - 6 - y + y^2$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = 3x^2 + 3y^2 - 14 = 0.$

Bài 32. Cho đường tròn (C) tâm I (1; 2), bán kính bằng 3. Tìm phương trình tập hợp các điểm M từ đó ta vẽ được hai tiếp tuyến với (C) tạo với nhau một góc bằng 60^0.

Giải



Xem hình vẽ tượng trưng: gọi M(x; y)

A là một tiếp điểm thì:

$\widehat{AMI} = 30^0 \Leftrightarrow \widehat{AIM} = 60^0$

$\Leftrightarrow MI = 2IA = 6$

$\Leftrightarrow MI^2 = 36$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$. Là phương trình tập hợp điểm M cần tìm.

Bài 33. Lập phương trình tập hợp tâm các đường tròn đi qua điểm A(1; 2) và tiếp xúc với trục hoành.

Giải

Gọi I (x; y) là tâm các đường tròn:

- Đường tròn tiếp xúc trục Ox $\Leftrightarrow |y| = R$
- Đường tròn qua A(1; 2) $\Leftrightarrow AI = R$

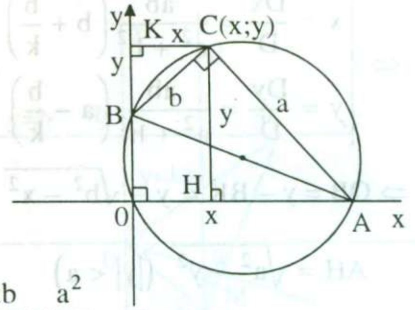
$\Leftrightarrow AI^2 = R^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = y^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 4y + 5 = 0.$

Bài 34. Cho tam giác ABC có các cạnh góc vuông AC = a; BC = b (a, b > 0) cho trước. A di động trên Ox; B di động trên Oy. Tìm tập hợp các đỉnh C.

Giải

Xem hình vẽ bên: $KB = \sqrt{BC^2 - CK^2} = \sqrt{b^2 - x^2}$



Phương trình đường thẳng AB:

$$\frac{x-a}{\dfrac{b}{k}-a} = \frac{y+\dfrac{a}{k}}{b+\dfrac{a}{k}} \Leftrightarrow (x-a)\left(b+\frac{a}{k}\right)$$

$$= \left(y+\frac{a}{k}\right)\left(\frac{b}{k}-a\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(b+\frac{a}{k}\right)x - \left(\frac{b}{k}-a\right)y = ab + \frac{a^2}{k} + \frac{ab}{k^2} - \frac{a^2}{k}$$

$$\Leftrightarrow \left(b+\frac{a}{k}\right)x - \left(\frac{b}{k}-a\right)y = ab\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

$\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{b}{k} - a; b + \dfrac{a}{k}\right)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng OM.

Phương trình đường thẳng OM có dạng:

$$\left(\frac{b}{k}-a\right)x + \left(b+\frac{a}{k}\right)y + C = 0$$

Đường thẳng này qua gốc O(0; 0) nên C = 0

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng OM:

$$\left(\frac{b}{k}-a\right)x + \left(b+\frac{a}{k}\right)y = 0$$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \left(b + \dfrac{a}{k}\right)x - \left(\dfrac{b}{k} - a\right)ay = ab\left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right) \\ \left(\dfrac{b}{k} - a\right)x + \left(b + \dfrac{a}{k}\right)y = 0 \end{cases}$$

Hệ có các định thức:

$$D = \left(b + \frac{a}{k}\right)^2 + \left(\frac{b}{k} - a\right)^2 = b^2 + a^2 + \frac{a^2}{k^2} + \frac{b^2}{k^2} = \left(a^2 + b^2\right)\left(a + \frac{1}{k^2}\right)$$

$$Dx = ab\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\left(b + \frac{a}{k}\right)$$

$$Dy = ab\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\left(a - \frac{b}{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{ab}{a^2 + b^2}\left(b + \dfrac{b}{k}\right) \\ y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{ab}{a^2 + b^2}\left(a - \dfrac{b}{k}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(a - \dfrac{b}{k}\right) = \dfrac{ab}{a^2 + b^2}\left(b + \dfrac{a}{k}\right)\left(a - \dfrac{b}{k}\right) \\ y\left(b + \dfrac{a}{k}\right) = \dfrac{ab}{a^2 + b^2}\left(a - \dfrac{b}{k}\right)\left(b + \dfrac{a}{k}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow OB = y - BK = y - \sqrt{b^2 - x^2} \Rightarrow B\left(0; y - \sqrt{b^2 - x^2}\right)$$

$$AH = \sqrt{a^2 - y^2} \quad (|y| < a)$$

$$\Rightarrow OA = x + \sqrt{a^2 - y^2} \Rightarrow A\left(x + \sqrt{a^2 - y^2}; 0\right)$$

Tam giác vuông CAB cho $AB^2 = a^2 + b^2$. Tam giác vuông OAB cho $OA^2 + OB^2 = AB^2$.

$$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{a^2 - y^2}\right)^2 + \left(y + \sqrt{b^2 - x^2}\right) = a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + a^2 - y^2 + 2x\sqrt{a^2 - y^2} + y^2 + b^2 - x^2 - 2y\sqrt{b^2 - x^2} = a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{a^2 - y^2} = y\sqrt{b^2 - x^2} \Leftrightarrow a^2x^2 = y^2b^2$$

$\Leftrightarrow y = \pm\dfrac{ax}{b}$ là phương trình tập hợp các đỉnh C thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 35. Cho hai điểm A(3cost, 0) và B(0; 2sint). Tìm phương trình tập hợp các điểm M(x; y) sao cho $2\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (t là tham số).

Giải

$\overrightarrow{AM} = (x - 3\cos t; y) \Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = (2x - 6\cos t; 2y)$

$\overrightarrow{MB} = (-x; 2\sin t - y) \Rightarrow 5\overrightarrow{MB} = (-5x; 10\sin t - 5y)$

$2\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MB} = (-3x - 6\cos t; 10\sin t - 3y) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 6\cos t = 0 \\ 10\sin t - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = -\dfrac{x}{2} \\ \sin t = \dfrac{3y}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 t = \dfrac{x^2}{4} \\ \sin^2 t = \dfrac{9y^2}{100} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{9y^2}{100} = 1$ là phương trình tập hợp điểm M thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 36. Cho hai đường thẳng d: x = a; d' = b (a, b là các hằng số khác 0). Một góc vuông quay quanh gốc O, hai cạnh góc vuông lần lượt cắt d, d' tại A và B. Tìm phương trình tập hợp các hình chiếu của O xuống AB.

Giải

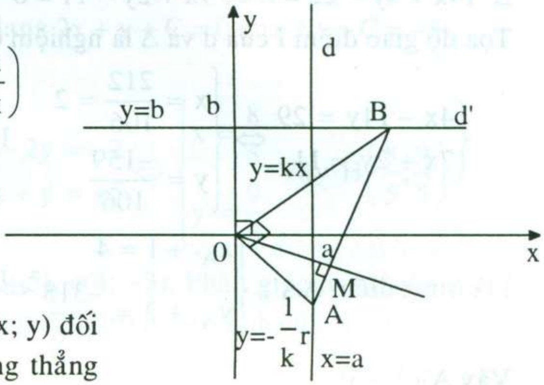
Xem hình vẽ: cạnh OB có phương trình $y = kx$ $(k \neq 0)$

$\Rightarrow$ Cạnh OA có phương trình :

$y = -\dfrac{2}{k}x \Rightarrow B\left(\dfrac{b}{k}; b\right);\ A\left(a; -\dfrac{a}{k}\right)$

$\Leftrightarrow x\left(a - \dfrac{b}{k}\right) - y\left(b + \dfrac{a}{k}\right) = 0$

Đây là phương trình của tập hợp điểm M.



❖ **DẠNG 2:** Tìm tọa độ điểm M'(x; y) đối xứng với điểm $M(x_0; y_0)$ qua đường thẳng d: Ax + By + C = 0.

Cách giải:

- Phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d có dạng Bx – Ay + D = 0 cho qua M_0, tính D.
- Tìm $I = d \cap \Delta$.
- Dùng hệ thức trung điểm, tính được tạo độ M'.

♦ Lời bình: Là bài tập phối hợp tốt giải phương pháp tọa độ trong mặt phẳng và phương trình đường thẳng.

CÁC ĐỀ TOÁN VÀ LỜI GIẢI:

Bài 37. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng d.

a. A(6; 5), d: 2x + y – 2 = 0.   b. A(1; 2), d: 4x – 14y – 29 = 0.

Giải

a. Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với d. Phương trình Δ có dạng: $x - 2y + C = 0$ qua A $\Leftrightarrow 6 - 2.5 + C = 0 \Leftrightarrow C = 4$.

Δ: $x - 2y + 4 = 0$

Tọa độ giao điểm I của d và Δ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{0}{5} \\ y = \dfrac{10}{5} \end{cases} \qquad I(0; 2)$$

Gọi A'(x; y) thì: $\begin{cases} x + 6 = 0 \\ y + 5 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases}$ $A'(-6; -1)$

b. Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với d. Phương trình Δ có dạng:

$14x + 4y + C = 0$ qua A $\Leftrightarrow 14 + 8 + C = 0 \Leftrightarrow C = -22$

Δ: $14x + 4y - 22 = 0 \Leftrightarrow 7x + 2y - 11 = 0$

Tọa độ giao điểm I của d và Δ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x - 14y = 29 \\ 7x + 2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{212}{106} = 2 \\ y = \dfrac{-159}{106} \end{cases} \qquad I\left(2; \dfrac{-159}{106}\right)$$

I là trung điểm AA': $\begin{cases} x_{A'} + 1 = 4 \\ y_{A'} + 2 = \dfrac{-318}{106} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 3 \\ y_{A'} = \dfrac{-318}{106} - 2 = -5 \end{cases}$

Vậy A'(3; –5).

Bài 38. Tìm tọa độ hình chiếu của A xuống đường thẳng d:

a. A(2; 3), d: $x + 2y - 3 = 0$ b. A(–1; 3), d: $5x + 2y - 30 = 0$

Giải

a. Gọi Δ là đường thẳng qua A và vuông góc với d. phương trình Δ có dạng:

$2x - y + C = 0$, qua A $\Leftrightarrow 4 - 3 + C = 0 \Leftrightarrow C = -1$

Δ: $2x - y - 1 = 0$

Gọi H là hình chiếu của A xuống d. Tọa độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{5} = 1 \\ y = \dfrac{5}{5} = 1 \end{cases} \qquad \text{Vậy } H(1; 1).$$

b. Gọi Δ là đường thẳng qua A và vuông góc với d. Phương trình Δ có dạng:

$2x - 5y + C = 0$; qua A $\Leftrightarrow 2.(-1) - 5.3 + C = 0 \Leftrightarrow C = 17$.

Δ: $2x - 5y + 17 = 0$

Gọi H là hình chiếu của A xuống d: Tọa độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -17 \\ 5x + 2y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{116}{29} = 4 \\ y = \dfrac{145}{29} = 5 \end{cases} \text{ Vậy } H(4;\,5)$$

Bài 39. Cho tam giác ABC với A(1; 3), B(0; 1), C(−4; −1). Tìm tọa độ chân H của đường cao vẽ từ đỉnh A xuống BC.

Giải

Phương trình đường thẳng chứa cạnh BC: $\dfrac{x}{-4} = \dfrac{y-1}{-2}$

$\Leftrightarrow x = 2y - 2 \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0$

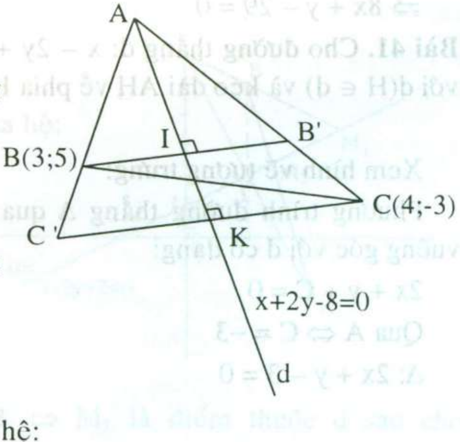
Phương trình đường cao AH có dạng $2x + y + C = 0$ qua A $\Leftrightarrow C = -5$

AH: $2x + y - 5 = 0$

Tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + y = +5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{5} \\ y = \dfrac{9}{5} \end{cases}$ Vậy $H\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{9}{5}\right)$

Bài 40. Cho tam giác ABC với B(3; 5), c(4; −3). Phân giác trong của góc A có phương trình là $x + 2y - 8 = 0$. Tìm phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Giải



Xem hình vẽ tượng trưng. (vẽ hình).

Gọi d: $x + 2y - 8 = 0$ là phân giác trong góc A:

- Điểm B' đối xứng với B qua d thì B' ∈ AC.
- Điểm C' đối xứng với C qua d thì C' ∈ AB.

Gọi Δ là đường thẳng qua B và vuông góc với d. Phương trình Δ có dạng.

$2x - y + C = 0$ qua B $\Leftrightarrow C = -1$

Δ: $2x - y - 1 = 0$

Tọa độ điểm I của Δ và d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10}{5} = 2 \\ y = \dfrac{15}{5} = 3 \end{cases}$$

Vậy I(2; 3).

I là trung điểm BB': $\begin{cases} x_{B'} = 4 - 3 \\ y_{B'} = 6 - 5 \end{cases}$ B'(1; 1)

$\Rightarrow$ Cạnh AC có phương trình $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-4} \Leftrightarrow 4x + 3y - 7 = 0$

Gọi Δ' là đường thẳng qua C và vuông với d. Phương trình Δ' có dạng: $2x - y + C = 0$ qua C $\Leftrightarrow C = -11$:

Δ': $2x - y - 11 = 0$

Tọa độ giao điểm K của d và Δ' là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y = 11 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{30}{5} = 6 \\ y = \dfrac{5}{5} = 1 \end{cases} \quad K(6; 1)$$

K là trung điểm CC': $\begin{cases} x_{C'} = 12 - 4 \\ y_{C'} = 2 + 3 \end{cases} \Rightarrow C'(8; 5)$

$\Rightarrow$ Cạnh AB có phương trình $y = 5$

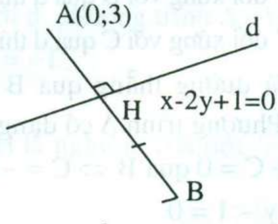
Phương trình cạnh BC: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{-8}$

$\Rightarrow 8x + y - 29 = 0$.

Bài 41. Cho đường thẳng d: $x - 2y + 1 = 0$ và điểm A(0; 3). Vẽ AH vuông góc với d(H ∈ d) và kéo dài AH về phía H một đoạn HB = 2AH. Tìm tọa độ điểm B.

Giải

Xem hình vẽ tượng trưng:



Phương trình đường thẳng Δ qua A và vuông góc với d có dạng:

$2x + y + C = 0$

Qua A $\Leftrightarrow C = -3$

Δ: $2x + y - 3 = 0$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{5} = 1 \\ y = \dfrac{5}{5} = 1 \end{cases}$ H(1; 1)

Theo yêu cầu bài toán thì HB = 2AH. Gọi B(x; y)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HB} = 2\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow (x-1; y-1) = 2\,(1; -2) = (2; -4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y-1=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$. Vậy B(3; –3).

Bài 42. Cho hai điểm A(1; 2), B(3; 4). Tìm trên trục hoành điểm P sao cho PA + PB nhỏ nhất.

Giải

Gọi A’ là điểm đối xứng với A qua trục Ox: A’(1; –2). Phương trình đường thẳng A’B: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{6} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{3}$

$\Leftrightarrow 3x - y - 5 = 0$

A’B cắt trục Ox tại P $\left(\dfrac{5}{3}; 0\right)$

PA + PB = PA’ + PB = A’B ngắn nhất: do ∀P’ ∈ Ox thì:

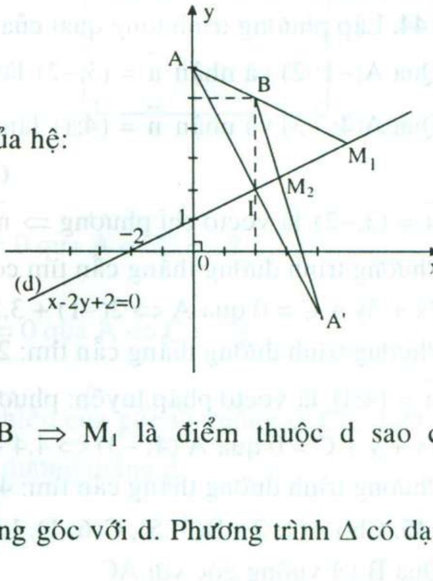
P’A’ + P’B = P’A + P’B ≥ A’B ⇒ Điểm cần tìm: P$\left(\dfrac{5}{3}; 0\right)$

Bài 43. Cho đường thẳng d: x – 2y + 2 = 0 và hai điểm A(0; 6), B(2; 5). Tìm điểm M ∈ d sao cho.

a. $|MA - MB|$ lớn nhất.

b. MA + MB nhỏ nhất.

Giải



a. Phương trình đường thẳng AB:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-6}{-1} \Leftrightarrow x + 2y - 12 = 0$$

AB cắt d tại M_1: tọa độ M_1 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x + 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{20}{4} = 5 \\ y = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$M_1\left(5; \dfrac{7}{2}\right)$. $M_1A - M_1B = AB = \sqrt{5}$

$\forall M \in d,\ M \neq M_1$: $|MA - MB| \le AB \Rightarrow M_1$ là điểm thuộc d sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

b. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với d. Phương trình Δ có dạng: 2x + y + C = 0 qua A ⇔ C = –6

$\Delta: 2x + y - 6 = 0$

Δ cắt d tại I: Tọa độ I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10}{5} = 2 \\ y = \dfrac{10}{5} = 2 \end{cases} \quad I(2;\,2)$$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d. I là trung điểm AA':

$$\begin{cases} x_{A'} = 4 - 0 \\ y_{A'} = 4 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow A'(4;\,-2)$$

Phương trình đường thẳng A'B: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-5}{-7} \Leftrightarrow 7x + 2y - 24 = 0$

A'B cắt d tại M_2. Tọa độ M_2 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 7x + 2y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{44}{16} = \dfrac{11}{4} \\ y = \dfrac{38}{16} = \dfrac{19}{8} \end{cases} \quad M_2\left(\dfrac{11}{4};\dfrac{19}{8}\right)$$

$M_2A' + M_2B = M_2B + M_2B = A'B = \sqrt{53}$

$\forall M' \neq M_2$ thuộc d: $M'A + M'B \geq M_2A + M_2B = M_2A' + M_2B = A'B = \sqrt{53}$

$\Rightarrow M_2\left(\dfrac{11}{4};\dfrac{19}{8}\right)$ là điểm cần tìm.

❖ DẠNG 3: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

ĐỀ TOÁN VÀ LỜI GIẢI

Bài 44. Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng:

a. Qua A(−1; 2) và nhận $\vec{a} = (3;-2)$ làm vectơ chỉ phương.

b. Qua A(4; −3) và nhận $\vec{n} = (4;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Giải

a. $\vec{a} = (3;-2)$ là vectơ chỉ phương $\Rightarrow \vec{n} = (2;3)$ là vectơ pháp tuyến.

Phương trình đường thẳng cần tìm có dạng:

$2x + 3y + C = 0$ qua A $\Leftrightarrow 2(-1) + 3.2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -4$

Phương trình đường thẳng cần tìm: $2x + 3y - 4 = 0$.

b. $\vec{n} = (4;1)$ là vectơ pháp tuyến: phương trình đường thẳng cần tìm có dạng:

$4x + y + C = 0$ qua A (4; −3) $\Leftrightarrow 4.4 + (-3) + C = 0 \Leftrightarrow C = -13$

Phương trình đường thẳng cần tìm: $4x + y - 13 = 0$.

Bài 45. Cho A(1; 2), B(3; 5), C(6; 1). Lập phương trình các đường thẳng:

a. Qua B và vuông góc với AC.

b. Qua A và song song với BC.

c. Trung trực của đoạn AB.

Giải

a. $\overrightarrow{AC} = (5; -1)$ là vectơ pháp tuyến $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng vuông góc với AC có dạng: $5x - y + C = 0$ qua B $\Leftrightarrow 5.3 - 5 + C = 0 \Leftrightarrow C = -10$

$\Rightarrow$ Đường thẳng qua B và vuông góc với AC: $5x - y - 10 = 0$

b. $\overrightarrow{BC} = (3; -4)$ vuông góc với $\vec{n} = (4; 3)$. Phương trình đường thẳng qua A và song song với BC có dạng:

$4x + 3y + C = 0$ qua A $\Leftrightarrow 4.1 + 3.2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -10$

Đường thẳng cần tìm: $4x + 3y - 10 = 0$.

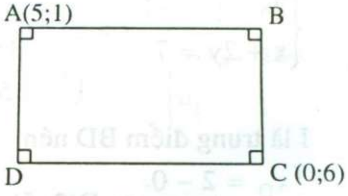
c. $\overrightarrow{AB} = (2; 3)$ trung điểm I của AB: $I\left(2; \frac{7}{2}\right)$

Phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB có dạng $2x + 3y + C = 0$ qua I $\Leftrightarrow 2.2 + 3.\frac{7}{2} = C = 0 \Leftrightarrow \frac{-29}{2}$

Đường thẳng cần tìm: $2x + 3y - \frac{29}{2} = 0$ (Hay $4x + 6y - 29 = 0$)

Bài 46. Một hình chữ nhật có hai đỉnh đối nhau A(5; 1), C(0; 6), một cạnh có phương trình $x + 2y - 12 = 0$. Tìm phương trình các cạnh còn lại.

Giải



Thấy ngay điểm C(0; 6) thuộc đường thẳng $x + 2y - 12 = 0$.

Gọi CB là cạnh có phương trình:

$x + 2y - 12 = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình cạnh CD có dạng:

$2x - y + C = 0$ qua C $\Leftrightarrow C = 6$

Cạnh CD: $2x - y + 6 = 0$

Phương trình cạnh AD có dạng $x + 2y + C = 0$ qua A $\Leftrightarrow C = -7$

$\Rightarrow$ cạnh AD: $x + 2y - 7 = 0$

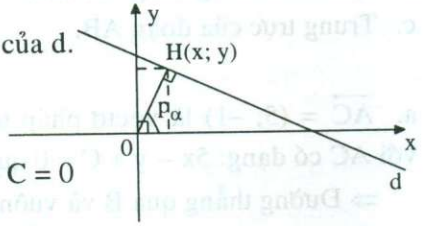
Phương trình cạnh AB có dạng: $2x - y + C = 0$ qua A $\Leftrightarrow C = -9$

$\Rightarrow$ cạnh AB: $2x - y - 9 = 0$.

Bài 47. Cho đường thẳng d và gọi H là hình chiếu của gốc O xuống d. Cho biết $OH = p$, $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH}\right) = \alpha\left[2\pi\right]$. Tìm phương trình đường thẳng d.

Giải

Xem hình bên



Nếu H(x; y) thì $x = p.\cos\alpha$, $y = p.\sin\alpha$.

$\overrightarrow{OH} = (p\cos\alpha; p\sin\alpha)$ là vectơ pháp tuyến của d.

Phương trình d có dạng:

$p.\cos\alpha.x + p.\sin\alpha.y + C = 0$

d qua H $\Leftrightarrow p.\cos\alpha.p\cos\alpha + p\sin\alpha.p\sin\alpha + C = 0$

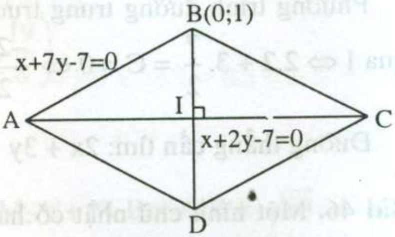
$\Leftrightarrow p^2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -p^2$

Phương trình d: $p\cos\alpha.x + p\sin\alpha.y - p^2 = 0 \Leftrightarrow x.\cos\alpha + y.\sin\alpha - p = 0$

Bài 48. Một hình thoi có: một đường chéo có phương trình $x + 2y - 7 = 0$, một cạnh có phương trình $x + 7y - 7 = 0$, một đỉnh là (0; 1). Tìm phương trình các cạnh còn lại.

Giải

Từ các giả thiết có thể vẽ hình (tượng trưng) bên



- Tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x + 7y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases} \quad A(7; 0)$$

- Phương trình đường chéo BD có dạng:

$2x - y + C = 0$ qua B $\Leftrightarrow C = 1$

BD: $2x - y + 1 = 0$

Tọa độ điểm I (giao điểm 2 đường chéo) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{5} = 1 \\ y = \dfrac{15}{5} = 3 \end{cases} \Rightarrow I(1; 3)$$

I là trung điểm BD nên:

$$\begin{cases} x_D = 2 - 0 \\ y_D = 6 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow D(2; 5)$$

Phương trình cạnh AD: $\dfrac{x - 7}{5} = \dfrac{y}{5} \Leftrightarrow \dfrac{x - 7}{-1} = \dfrac{y}{1} \Leftrightarrow x + y - 7 = 0$

Phương trình cạnh DC (//AB) có dạng $x + 7y + C = 0$ qua D $\Leftrightarrow C = -37$

DC: $x + 7y - 37 = 0$

Phương trình cạnh BC có dạng: $x + y + C = 0$ qua B $\Leftrightarrow C = -1$

BC: $x + y - 1 = 0$.

Bài 49. Lập phương trình của đường thẳng đối xứng của đường thẳng d: $x - 2y - 5 = 0$ qua điểm A(2; 1).

Giải

Chọn điểm $M(7; 1) \in d \Rightarrow N(-3; 1)$ là điểm đối xứng của M qua A. Phương trình đường thẳng d' đối xứng của d qua A có dạng:

$x - 2y + C = 0$ d' qua N $\Leftrightarrow -3 - 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = 5$

Phương trình d': $x - 2y + 5 = 0$.

Bài 50. Cho d_1: $5x - 2y + 7 = 0$, d_2: $5x - 2y - 9 = 0$. Lập phương trình đường thẳng song song và cách đều d_1, d_2.

Giải

Gọi d là đường thẳng cần tìm thì $d \parallel d_1 \parallel d_2$ và nằm ở khoảng giữa d_1 và d_2. Điểm O (0; 0) cũng nằm ở khoảng giữa của d_1 và d_2:

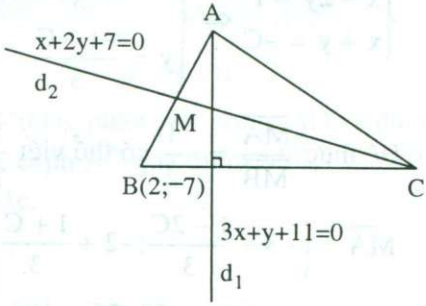
Gọi $M(x; y) \in d$ thì tọa độ M thỏa mãn:

$5x - 2y + 7 = -(5x - 2y - 9) \Leftrightarrow 10x - 4y - 2 = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y - 1 = 0$

Bài 51. Cho tam giác ABC có B(2; −7). Phương trình đường cao kẻ từ A là d_1: $3x + y + 11 = 0$, trung tuyến kẻ từ C là d_2: $x + 2y + 7 = 0$. Tìm phương trình các cạnh của tam giác.

Giải

Xem hình vẽ tượng trưng bên



Phương trình cạnh BC vì vuông góc với d_1 nên có dạng:

$x - 3y + C = 0$ qua B $\Leftrightarrow 2 - 3(-7) + C = 0 \Leftrightarrow C = -23$

Cạnh BC: $x - 3y - 23 = 0$

- Tọa độ đỉnh C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 3y = 23 \\ x + 2y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{25}{5} = 5 \\ y = \dfrac{-30}{5} = -6 \end{cases} \quad C(5; -6)$$

Gọi $M(-2m - 7; m)$ là trung điểm AB (do M thuộc d_2)

$A(a; -3a - 11)$ (do $A \in d_1$)

Ta có: $$\begin{cases} a + 2 = -4m - 14 \\ -3a - 11 - 7 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + a = -16 \\ 2m + 3a = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{-30}{10} = -3 \\ a = \dfrac{-40}{10} = -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow A(-4; 1)$

Phương trình cạnh BA:

$$\frac{x+4}{6}=\frac{y-1}{-8}\Leftrightarrow\frac{x+4}{3}=\frac{y-1}{-4}\Leftrightarrow 4x+3y+13=0$$

Phương trình cạnh AC: $\frac{x+4}{9}=\frac{y-1}{-7}\Leftrightarrow 7x+9y+19=0$.

Bài 52. Cho điểm A(–3; –2), B(3; 1) và đường thẳng d, $x + y - 4 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng song song với d và cắt đoạn AB tại M sao cho $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{1}{2}$.

Giải

Phương trình đường thẳng AB:

$$\frac{x+3}{6}=\frac{y+2}{3}\Leftrightarrow\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{1}\Leftrightarrow x-2y-1=0$$

Phương trình đường thẳng d' song song với đường thẳng d có dạng:

$x + y + C = 0$

M là giao điểm của d' và đường thẳng AB. Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x-2y=1\\x+y=-C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1-2C}{3}\\y=\dfrac{-1-C}{3}\end{cases}\quad M\left(\frac{1-2C}{3};\frac{-1-C}{3}\right)$$

Hệ thức $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{1}{2}$ có thể viết $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$

$$\overrightarrow{MA}=\left(-3-\frac{1-2C}{3};-2+\frac{1+C}{3}\right)=\left(\frac{2C-10}{3};\frac{C-5}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MA}=\left(\frac{4C-20}{3};\frac{2C-10}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{MB}=\left(3-\frac{1-2C}{3};1+\frac{1+C}{3}\right)=\left(\frac{2C+8}{3};\frac{C+4}{3}\right)$$

$$\Rightarrow -\overrightarrow{MB}=\left(\frac{-2C-8}{3};\frac{-C-4}{3}\right)$$

$$2\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4C-20}{3}=\dfrac{-2C-8}{3}\\\dfrac{2C-10}{3}=\dfrac{-C-4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6C=12\\3C=6\end{cases}\Leftrightarrow C=2$$

Đường thẳng cần tìm: $x + y + 2 = 0$

Bài 53. Hai cạnh bên của một tam giác cân có phương trình là: $2x - y + 5 = 0$, $3x + 6y - 1 = 0$, cạnh đáy của tam giác đi qua điểm $M(2; -1)$. Tìm phương trình cạnh đáy.

Giải

Dễ thấy tam giác cho trong đề toán là tam giác vuông cân, do tích vô hướng của hai vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (-6;3)$; $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

Gọi d là phương trình cạnh đáy: $y = k(x - 2) - 1 \Leftrightarrow kx - y - 2k - 1 = 0$, d có vectơ chỉ phương $\vec{c} = (1;k)$.

d tạo với cạnh $2x - y + 5 = 0$ góc 45^0 nên:

$$\cos\left(\vec{a},\vec{c}\right) = \frac{2 + k}{\sqrt{2^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(2 + k) = \sqrt{5}\left(\sqrt{1 + k^2}\right)$$

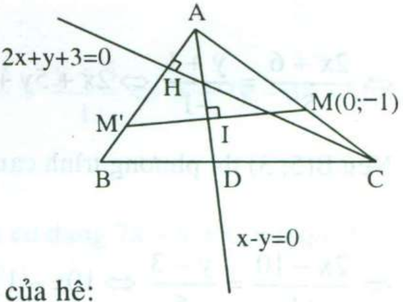
$$\Leftrightarrow 2(k^2 + 4k + 4) = 5(k^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 3k^2 - 8k - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -\dfrac{1}{3} \\ k = 3 \end{array}\right.$$

Chọn $k = 3$ do $k > -2$: phương trình cạnh đáy: $3x - y - 7 = 0$

Bài 54. Cho tam giác ABC có: phương trình đường phân giác trong AD và đường cao CH lần lượt là $x - y = 0$; $2x + y + 3 = 0$; cạnh AC qua điểm $M(0; -1)$. $AB = 2AM$. Viết phương trình các cạnh của tam giác.

Giải



Điểm M' đối xứng của $M(0; -1)$ qua phân giác trong AD sẽ thuộc cạnh AB.

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với AD.

Phương trình d có dạng $x + y + C = 0$ qua $M \Leftrightarrow 0 - 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = 1$

d: $x + y + 1 = 0$

Tọa độ giao điểm I của AD và d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

I là trung điểm MM': $\begin{cases} x_{M'} = -1 - 0 \\ y_{M'} = -1 - (-1) \end{cases}$ M'(−1; 0)

Cạnh AB vuông góc với đường cao CH. Phương trình cạnh AB có dạng:

$x - 2y + C = 0$ qua M' $\Leftrightarrow -1 + C = 0 \Leftrightarrow C = 1$

$\Rightarrow$ Phương trình cạnh AB: $x - 2y + 1 = 0$

Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy A(1; 1)

Phương trình cạnh AC: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y + 1}{2} \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$

$B \in AB$ nên tọa độ $B(2b - 1; b)$

$AM = \sqrt{(0 - 1)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{5}$

$AB = \sqrt{(2b - 1 - 1)^2 + (b - 1)^2} = \sqrt{5b^2 - 10b + 5}$

$AB = 2AM \Leftrightarrow AB^2 = 4AM^2 \Leftrightarrow 5b^2 - 10b + 5 = 4.5 = 20$

$\Leftrightarrow 5b^2 - 10b - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -1 \\ b = 3 \end{array}\right.$

- $b = -1$ thì $B(-3; -1)$
- $b = 3$ thì $B(5; 3)$

Tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases}$ $C\left(-\dfrac{1}{2}; -2\right)$

Nếu B(−3; −1) thì phương trình cạnh BC: $\dfrac{x + 3}{-\dfrac{1}{2} + 3} = \dfrac{y + 1}{-2 + 1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x + 6}{5} = \dfrac{y + 1}{-1} \Leftrightarrow 2x + 5y + 11 = 0$

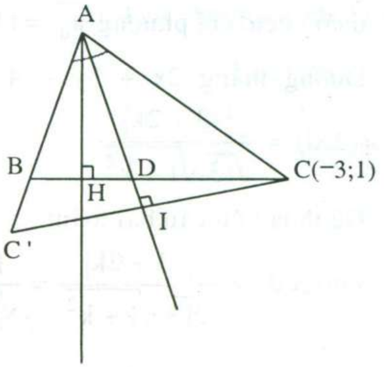
Nếu B(5; 3) thì phương trình cạnh BC: $\dfrac{x - 5}{-\dfrac{1}{2} - 5} = \dfrac{y - 3}{-2 - 3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x - 10}{11} = \dfrac{y - 3}{5} \Leftrightarrow 10x - 11y - 17 = 0.$

Bài 55. Cho tam giác ABC có C(−3; 1), phương trình đường phân giác trong AD: $x + 3y + 12 = 0$, phương trình đường cao AH: $x + 7y + 32 = 0$. Tìm phương trình các cạnh của tam giác.

Giải

Xem hình vẽ tượng trưng:



- Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 3y = -12 \\ x + 7y = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{12}{4} = 3 \\ y = \dfrac{-20}{4} = -5 \end{cases}$$

$\Rightarrow A(3; -5)$

$\Rightarrow$ Phương trình cạnh AC: $\dfrac{x+3}{6} = \dfrac{y-1}{-6}$

$\Leftrightarrow -x - 3 = y - 1 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0.$

- Gọi C' là điểm đối xứng với C qua phân giác trong AD thì $C' \in AB$

Phương trình đường thẳng CC' có dạng:

$3x - y + C = 0$ qua C $\Leftrightarrow -9 - 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = 10$

CC': $3x - y + 10 = 0$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x - y = -10 \\ x + 3y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-42}{10} = \dfrac{-21}{5} \\ y = \dfrac{-26}{10} = -\dfrac{13}{5} \end{cases} I\left(\dfrac{-21}{5}; \dfrac{-13}{5}\right)$$

I là trung điểm CC':

$$\begin{cases} x_{C'} = -\dfrac{42}{5} + 3 \\ y_{C'} = -\dfrac{26}{5} - 1 \end{cases} \Rightarrow C'\left(-\dfrac{27}{5}; -\dfrac{31}{5}\right)$$

$\Rightarrow$ Phương trình cạnh AB:

$$\frac{x-3}{-\frac{27}{5}-3} = \frac{y+5}{-\frac{31}{5}+5} \Leftrightarrow \frac{x-3}{-\frac{42}{5}} = \frac{y+5}{-\frac{6}{5}} \Leftrightarrow \frac{x-3}{7} = \frac{y+5}{1} \Leftrightarrow x - 7y - 38 = 0$$

(Độc giả cần lưu ý cách tính cho gọn!)

Phương trình cạnh BC vì vuông góc với AH nên có dạng $7x - y + C = 0$ qua C

$\Leftrightarrow 7.(-3) - 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = 22$

$\Rightarrow$ Phương trình cạnh BC: $7x - y + 22 = 0$

Bài 56. Lập phương trình đường thẳng qua điểm A(2; 1) và tạo với đường thẳng $2x + 3y + 4 = 0$ một góc bằng 45^0.

Giải

Gọi d là đường thẳng $y = k(x - 2) + 1 \Leftrightarrow kx - y - 2k + 1 = 0$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d} = (1; k)$

Đường thẳng $2x + 3y + 4 = 0$ (Δ) có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (-3; 2)$.

$$\cos(\Delta; d) = \frac{|-3 + 2k|}{\sqrt{13}.\sqrt{1 + k^2}}.$$

Để thỏa yêu cầu bài toán:

$$\cos(\Delta; d) = \frac{|-1 + 2k|}{\sqrt{13}.\sqrt{1 + k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}|2k - 3| = \sqrt{13}.\sqrt{1 + k^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(4k^2 - 12k + 9) = 13 + 13k^2 \Leftrightarrow 5k^2 + 24k - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -5 \\ k = \dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

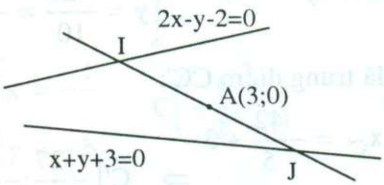
Với $k = -5$: d: $-5x - y + 11 = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 11 = 0$

Với $k = \frac{1}{5}$: d: $\frac{1}{5}x - y - \frac{2}{5} + 1 \Leftrightarrow x - 5y + 3 = 0$

Bài 57. Lập phương trình đường thẳng qua A(3, 0) và cắt các đường thẳng $2x - y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$ tại các điểm I, J sao cho A là trung điểm của IJ.

Giải

Xem hình vẽ tượng trưng



Gọi d là đường thẳng $y = k(x - 3)$

$\Leftrightarrow kx - y - 3k = 0$

d_1 là đường thẳng $2x - y - 2 = 0$

d_2 là đường thẳng $x + y + 3 = 0$

d cắt d_1 tại I: tọa độ I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ kx - y = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3k - 2}{k - 2} \\ y = \dfrac{4k}{k - 2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{3k - 2}{k - 2}; \frac{4k}{k - 2}\right)$$

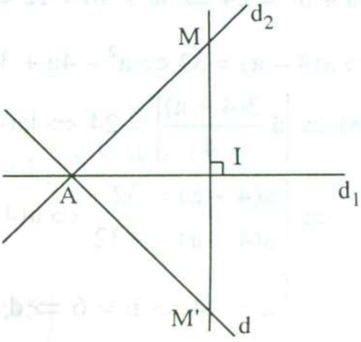
d cắt d_2 tại J: tọa độ J là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ kx - y = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3 - 3k}{-1 - k} \\ y = \dfrac{6k}{-1 - k} \end{cases} \Rightarrow J\left(\frac{3k - 3}{k + 1}; \frac{-6k}{k + 1}\right)$$

A là trung điểm IJ $\Leftrightarrow \dfrac{3k - 2}{k - 2} + \dfrac{3k - 3}{k + 1} = 6 \Leftrightarrow k = 8$

Đường thẳng cần tìm: $8x - y = 24 = 0$.

Bài 58. Cho d_1: $x - 3y + 6 = 0$; d_2: $2x - y - 3 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d đối xứng của d_2 qua d_1.



Giải

Xem hình vẽ tượng trưng

d_1 và d_2 cắt nhau tại A

Tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - 3y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-15}{-5} = 3 \\ y = \dfrac{-15}{-5} = 3 \end{cases} \quad A(3;\,3)$$

Chọn $M(1; -1) \in d_2$

Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với d_1. Phương trình Δ có dạng:

$3x + y + C = 0$ qua M $\Leftrightarrow C = -2$

Δ: $3x + y - 2 = 0$

Tọa độ I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 3y = -6 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{0}{10} = 0 \\ y = \dfrac{20}{10} = 2 \end{cases}$

I là trung điểm MM'$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 0 - 1 \\ y_{M'} = 4 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow M'(-1;\,5)$

d là đường thẳng qua A và M':

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-5}{-2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{-1} \Leftrightarrow x + 2y - 9 = 0$$

Bài 59. Tìm phương trình đường thẳng d qua A(8; 6) và tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 12.

Giải

Giả sử d cắt Ox tại B(a; 0), cắt Oy tại C(0; b) thì phương trình của d có dạng $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

d qua A (8; 6) $\Leftrightarrow \dfrac{8}{a} + \dfrac{6}{b} = 1 \Leftrightarrow 6a + 8b = ab$

Diện tích tam giác OBC = 12 $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}|a|.|b| = 12 \Leftrightarrow |ab| = 24 \quad (*)$

$\Leftrightarrow ab = 24$ hay $a.b = -24$

- Nếu $a.b = 24$

$$6a + 8b = 24 \Leftrightarrow 3a + 4b = 12 \Leftrightarrow b = \frac{3(4-a)}{4}.\frac{a.3(4-a)}{4} = 24$$

$\Leftrightarrow a(4-a) = 32 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 32 = 0$ vô nghiệm a

$$(*) \Leftrightarrow \left|a.\frac{3(4-a)}{4}\right| = 24 \Leftrightarrow |a(4-a)| = 32$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a(4-a) = 32 \\ a(4-a) = -32 \end{array}\right. \Leftrightarrow a(4-a) = -32 \Leftrightarrow a^2 - 4a - 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -4 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow d: \dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{6} = 1 \\ a = 8 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow d: \dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{-3} = 1 \end{array}\right.$$

Các kết quả này không thỏa điều kiện d qua A(8; 6).

- Nếu $ab = -24$

$$6a + 8b = -24 \Leftrightarrow 3a + 4b = -12 \Leftrightarrow b = \frac{-3(4+a)}{4}.\, a\left[\frac{-3(4+a)}{a}\right] = -24$$

$$\Leftrightarrow a(4+a) = 32$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a - 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \Rightarrow b = -6 \\ a = -8 \Rightarrow b = 3 \end{array}\right.$$

Hai đường thẳng thỏa điều kiện:

$$d: \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 1;\quad d: \frac{x}{-8} + \frac{y}{3} = 1$$

Bài 60. Cho P(−2; 3). Tìm phương trình đường thẳng qua P và cách đều hai điểm A(5; −1), B(3; 7).

Giải

Gọi d là đường thẳng $y = k(x + 2) + 3 \Leftrightarrow kx - y + 2k + 3 = 0$

$$d(A, d) = \frac{|5k + 1 + 2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|7k + 4|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$d(B, d) = \frac{|3k - 7 + 2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|5k - 4|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

để d cách đều A và B $\Leftrightarrow |7k + 4| = |5k - 4|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7k + 4 = 5k - 4 \\ 7k + 4 = -5k + 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -4 \\ k = 0 \end{array}\right.$$

- $k = -4$: d: $-4x - y - 5 = 0 \Leftrightarrow 4x + y + 5 = 0$.
- $k = 0$: d: $y - 3 = 0$.

Bài 61. Viết phương trình đường thẳng qua điểm M(–4; 3) và cắt trục hoành, trục tung làm lượt tại A, B thỏa $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{3}{5}$.

Giải

Đường thẳng cần tìm có dạng: $y = k(x + 4) + 3 \Leftrightarrow kx - y + 4k + 3 = 0$

$\Rightarrow A\left(\frac{-4k-3}{k};0\right)$; B(0; 4k + 3)

$\overrightarrow{AM} = \left(-4 + \frac{4k+3}{k};3\right) = \left(\frac{3}{k};3\right) \Rightarrow 5\overrightarrow{AM} = \left(\frac{15}{k};15\right)$

$\overrightarrow{MB} = (4;4k) \Rightarrow 3\overrightarrow{MB} = (12;12k)$

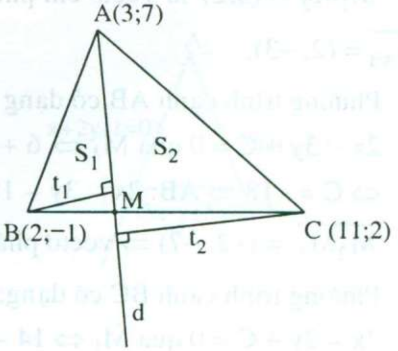
$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{k} = 12 \\ 15 = 12k \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{5}{4}$$

Đường thẳng phải tìm: $\frac{5}{4}x - y + 5 + 3 = 0 \Leftrightarrow 5x - 4y + 32 = 0$.

Bài 62. Cho tam giác ABC với A(3; 3), B(2; –1), C(11; 2). Tìm phương trình đường thẳng d qua A và chia tam giác ABC thành hai phần có tỉ số diện tích bằng 2.

Giải

Xem hình vẽ tượng trưng



Phương trình d có dạng: $y = k(x - 3) + 3$

$\Leftrightarrow kx - y - 3k + 3 = 0$

d cắt cạnh BC tại M

Gọi $S_{ABM} = S_1 = \frac{1}{2}AM.t_1$; $t_1 = d(B, d)$

$S_{ACM} = S_2 = \frac{1}{2}AM.t_2$; $t_2 = d(C, d)$

$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1}{t_2}$

Theo yêu cầu bài toán thì $\frac{S_1}{S_2} = 2 \Leftrightarrow t_1 = 2t_2$

$$t_1 = \frac{|2k + 1 - 3k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|4 - k|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$t_2 = \frac{|11k - 2 - 3k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|8k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$t_1 = 2t_2 \Leftrightarrow |4 - k| = 2|8k + 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 - k = 16k + 2 \\ 4 - k = -16k - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{2}{17} \\ k = \dfrac{-2}{5} \end{array}\right.$$

- $k = \dfrac{2}{17}$ thì phương trình d: $2x - 17y + 45 = 0$.
- $k = \dfrac{-2}{5}$ thì phương trình d: $2x + 5y - 21 = 0$.

Nếu $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow t_2 = 2t_1 \Leftrightarrow |8k + 1| = 2|4 - k|$

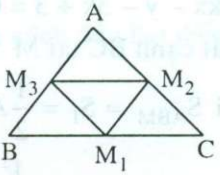
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8k + 1 = 8 - 2k \\ 8k + 1 = -8 + 2k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{7}{10} \\ k = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

- $k = \dfrac{7}{10}$ thì phương trình d: $7x - 10y + 9 = 0$.
- $k = -\dfrac{3}{2}$ thì phương trình d: $3x + 2y - 15 = 0$.

Bài 63. Ba trung điểm của ba cạnh của một tam giác là: $M_1(2;\ 1)$, $M_2(5;\ 3)$, $M_3(3;\ -4)$. Tìm phương trình ba cạnh của tam giác.

Giải

$\overrightarrow{M_1M_2} = (3;2)$ là vectơ chỉ phương của cạnh AB $\Rightarrow$ AB có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{AB}} = (2;\ -3)$.



Phương trình cạnh AB có dạng

$2x - 3y + C = 0$ qua $M_3 \Leftrightarrow 6 + 12 + C = 0$

$\Leftrightarrow C = -18 \Rightarrow$ AB: $2x - 3y - 18 = 0$

- $\overrightarrow{M_2M_3} = (-2;\ -7) \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của cạnh BC là $\overrightarrow{n_{BC}} = (7;-2)$

  Phương trình cạnh BC có dạng:

  $7x - 2y + C = 0$ qua $M_1 \Leftrightarrow 14 - 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -12 \Rightarrow$ BC: $7x - 2y - 12 = 0$

- $\overrightarrow{M_1M_3} = (1;-5) \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của cạnh AC là $\overrightarrow{n_{AC}} = (5;\ 1)$

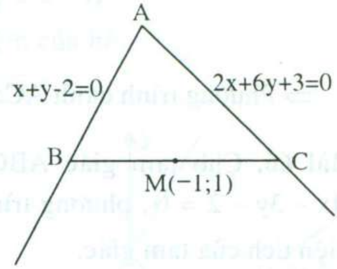
  Phương trình cạnh AC có dạng:

  $5x + y + C = 0$ qua $M_2 \Leftrightarrow 25 + 3 + C = 0 \Leftrightarrow C = -28 \Rightarrow$ AC: $5x + y - 28 = 0$

Bài 64. Một tam giác có trung điểm một cạnh là $M(-1;\ 1)$, hai cạnh có phương trình là: $x + y - 2 = 0$; $2x + 6y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Giải

Vị trí điểm M và hai cạnh đề cho như hình bên:



Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 6y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{15}{4} \\ y = \dfrac{-7}{4} \end{cases} \quad A\left(\frac{15}{4}; -\frac{7}{4}\right)$$

Tọa độ $B(b; 2-b)$, $C\left(c; \dfrac{-2c-3}{6}\right)$

$M(-1; 1)$ là trung điểm BC nên:

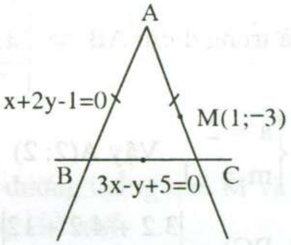
$$\begin{cases} b + c = -2 \\ 2 - b + \dfrac{-2c-3}{6} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -2 \\ 6b + 2c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{-1}{-4} = \dfrac{1}{4} \\ c = \dfrac{9}{-4} = -\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right), C\left(-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}\right)$$

Bài 65. Một tam giác cân có cạnh đáy và một cạnh bên có phương trình lần lượt là $3x - y + 5 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$. Lập phương trình cạnh bên còn lại biết rằng nó đi qua điểm $M(1; -3)$

Giải

Xem hình bên:



Phương trình cạnh AC có dạng

$y = k(x-1) - 3 \Leftrightarrow kx - y - k - 3 = 0$

AC có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{AC}} = (1; k)$

AB có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{AB}} = (-2; 1)$

BC có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{BC}} = (1; 3)$

$$\cos B = \frac{|-2+3|}{\sqrt{5}.\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{5}.\sqrt{10}}$$

$$\cos C = \frac{|1+3k|}{\sqrt{10}.\sqrt{1+k^2}}$$

$$\cos B = \cos C \Leftrightarrow \frac{|3k+1|}{\sqrt{10}.\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}.\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sqrt{5}|3k+1| = \sqrt{k^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 5(9k^2 + 6k + 1) = k^2 + 1 \Leftrightarrow 44k^2 + 30k + 4 = 0$$

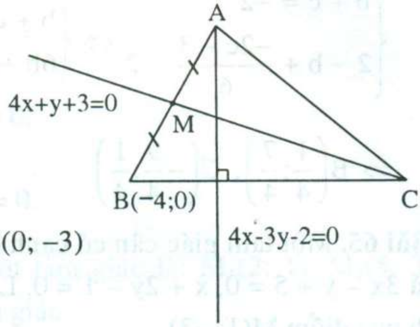
$$\Leftrightarrow 22k^2 + 15k + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -\dfrac{1}{2} \text{ (là hệ số góc của AB)} \\ k = -\dfrac{2}{11} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình cạnh AC: } -\frac{2}{11}x - y + \frac{2}{11} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + 11y + 31 = 0.$$

Bài 66. Cho tam giác ABC có B(–4; 0), phương trình đường cao vẽ từ A: $4x - 3y - 2 = 0$, phương trình đường trung tuyến vẽ từ C: $4x + y + 3 = 0$. Tính diện tích của tam giác.

Giải

Xem hình vẽ tượng trưng:



Phương trình cạnh BC có dạng:

$3x + 4y + C = 0$ qua B $\Leftrightarrow C = 12$

BC: $3x + 4y + 12 = 0$

Tọa độ đỉnh C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x + y = -3 \\ 3x + 4y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{0}{13} = 0 \\ y = \dfrac{-39}{13} = -3 \end{cases} \Rightarrow C(0; -3)$$

Tọa độ $A\left(a; \dfrac{4a - 2}{3}\right)$, $M(m, 4m - 3)$

M là trung điểm AB $\Leftrightarrow \begin{cases} a - 4 = 2m \\ \dfrac{4a - 2}{3} + 0 = -8m - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2m = 4 \\ a + 6m = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ m = -1 \end{cases}$. Vậy A(2; 2)

$$d(A, BC) = \frac{|3.2 + 4.2 + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{26}{5} = h_a$$

$$BC = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.h_a = \frac{1}{2}\frac{26}{5}.5 = 13 \text{ đơn vị diện tích}$$

Bài 67. Cho đường thẳng d: $2x - 2y + 1 = 0$ và hai điểm A(0; 4), B(5; 0). Tìm phương trình hai đường thẳng d_1 qua A, d_2 qua B và nhận d làm đường phân giác.

Giải

Xem hình bên:

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d.

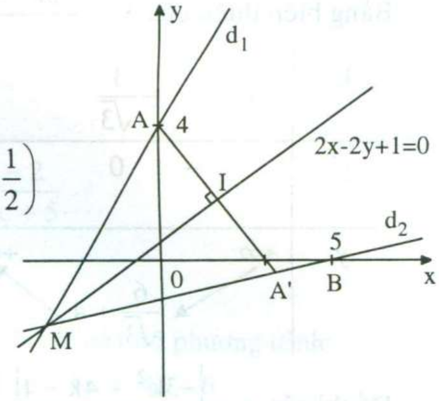
Phương trình đường thẳng AA' có dạng:

$x + y + C = 0$ qua A $\Leftrightarrow C = -4 \Rightarrow$ AA': $x + y - 4 = 0$

$\Rightarrow$ Tọa độ giao điểm I của AA' và d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - 2y = -1 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{4} \\ y = \dfrac{9}{4} \end{cases} \quad I\left(\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)$$

I là trung điểm AA': $\begin{cases} x_{A'} = \dfrac{7}{2} - 0 \\ y_{A'} = \dfrac{9}{2} - 4 \end{cases}$ $A'\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{1}{2}\right)$



d_2 là đường thẳng đi qua BA':

$$\frac{x-5}{\frac{7}{2}-5} = \frac{y}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{x-5}{-3} = \frac{y}{1}$$

$\Leftrightarrow x + 3y - 5 = 0$

d_2 cắt d tại M. Tọa độ M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - 2y = -1 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{8} \\ y = \dfrac{11}{8} \end{cases} \quad M\left(\frac{7}{8};\frac{11}{8}\right)$$

d_1 là đường thẳng đi qua A, M: $\dfrac{x}{\frac{7}{8}} = \dfrac{y-4}{\frac{11}{8}-4} \Leftrightarrow \dfrac{x}{7} = \dfrac{y-4}{-21} \Leftrightarrow \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-4}{-3}$

$\Leftrightarrow 3x + y - 4 = 0$.

Bài 68. Cho điểm M(3; 1). Tìm phương trình đường thẳng qua M và cắt hai nửa trục Ox, Oy tại A, B thỏa điều kiện (OA + OB) nhỏ nhất.

Giải

Gọi d là đường thẳng cần tìm.

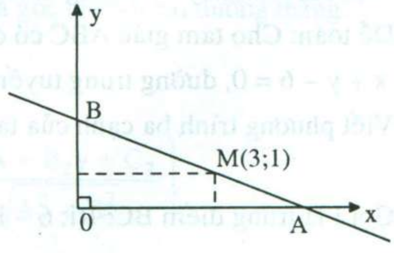
Phương trình d có dạng:

$y = k(x - 3) + 1 \ (k \neq 0)$

$\Leftrightarrow kx - y - 3k + 1 = 0$

d cắt Ox tại $A\left(\dfrac{3k-1}{k};0\right)$

d cắt Oy tại $B\left(0;-3k+1\right)$



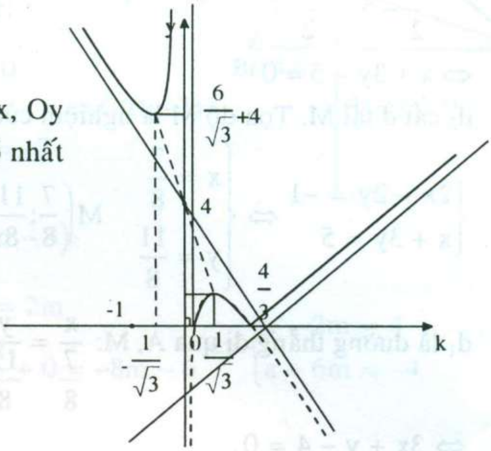
$$OA = \left|\frac{3k-1}{k}\right| + \left|-3k+1\right| \geq \left|\frac{3k-1}{k} + (-3k+1)\right| = \left|\frac{-3k^2+4k-1}{k}\right|$$

Xét hàm số $y = \left|\dfrac{-3k^2+4k-1}{k}\right|$

Bảng biến thiên của $y = \dfrac{-3k^2+4k-1}{k}$

k	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
y'		−	0	+ || +			0	−	
y	$+\infty$	↘	$\frac{6}{\sqrt{3}}+4$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$\frac{6}{\sqrt{3}}-4$	↘	$-\infty$

Đồ thị của $y = \left|\dfrac{-3k^2+4k-1}{k}\right|$



Do vị trí của M và hai nửa trục Ox, Oy nên $k < 0 \Rightarrow OA + OB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $k = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow$ Phương trình d:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}x - y - 3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{3}y - \left(3 + \sqrt{3}\right) = 0$$

♦ Lời bình: Kiến thức toán lớp 12 cần được sử dụng toàn diện, không chỉ bó hẹp một môn học (bài này cho biết việc áp dụng đồ thị để nhìn nhanh được giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) của một biểu thức đại số.

* Một bài toán hay về đường thẳng

Đề toán: Cho tam giác ABC có đỉnh A(5; 2), đường trung trực cạnh BC: $x + y - 6 = 0$, đường trung tuyến xuất phát từ C: $2x + y - 3 = 0$

Viết phương trình ba cạnh của tam giác.

Giải

Gọi I là trung điểm BC: $I(i; 6 - i)$, $C(c; 3 - 2c) \Rightarrow B(2i - c; 9 + 2c - 2i)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = (2c - 2i; -6 - 4c + 2i)$. Đường trung trực của BC có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 1)$.

$\overrightarrow{BC} \perp \vec{a} \Leftrightarrow 2i - 2c - 6 - 4c + 2i = 0 \Leftrightarrow 2i - 3c - 3 \Leftrightarrow i = \dfrac{3c+3}{2}$

$\Rightarrow I\left(\dfrac{3c+3}{2};\dfrac{9-3c}{2}\right)$, $B(2c + 3; 6 - c)$.

AI là trung tuyến kẽ từ A của tam giác ABC

Phương trình đường thẳng AI:

$$\frac{x-5}{\dfrac{3c+2}{2}-5} = \frac{y-2}{\dfrac{9-3c}{2}-2} \Leftrightarrow \frac{x-5}{3c-7} = \frac{y-2}{-3c+5}$$

$\Leftrightarrow (3c-5)x + (3c-7)y - 21c + 39 = 0$

Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(3c-5)x + (3c-7)y = 21c - 39\\ 2x + y = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{12c-18}{-3c+9} = \dfrac{4c-6}{-c+3}\\ y_G = \dfrac{-33+63}{-3c+9} = \dfrac{11c-21}{c-3}\end{cases}$$

Hệ thức tọa độ trọng tâm tam giác:

$$\begin{cases}x_A + x_B + x_C = 3x_G\\ y_A + y_B + y_C = 3y_G\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5 + 2c + 3 + c = 3\left(\dfrac{4c-6}{-c+3}\right)\\ 2 + 6 - c + 3 - 2c = 3\left(\dfrac{11c-21}{c-3}\right)\end{cases}$$

Nghiệm chung của hệ là C = −6

Từ đó có B(−9; 12), C(−6; 15)

⇒ Phương trình cạnh AB: $5x + 7y - 39 = 0$

Phương trình cạnh BC: $x - y + 21 = 0$

Phương trình cạnh AC: $13x + 11y - 87 = 0$

❖ **DẠNG 4:** Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng:

d_1: $A_1x + B_1y + C = 0$

d_2: $A_2x + B_2y + C = 0$

- Phương trình chung: $\dfrac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\left(\dfrac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\right)$

d_1 có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (A_1;B_1)$

d_2 có vecơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = (A_2;B_2)$

$$\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

- Nếu $A_1A_2 + B_1B_2 > 0$ phương trình phân giác góc nhọn là:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} + \left(\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\right) = 0$$

- Nếu $A_1A_2 + B_1B_2 > 0$ phương trình phân giác góc nhọn là:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \left(\frac{A_2y + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\right) = 0$$

Bài 69. Lập phương trình phân giác của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng:

d_1: $7x + y + 6 = 0$; d_2: $x - y + 2 = 0$.

Giải

$\overrightarrow{n_{d_1}} = (7; 1)$, $\overrightarrow{n_{d_2}} = (1;-1)$

$\overrightarrow{n_{d_1}}.\overrightarrow{n_{d_2}} = 7 - 1 = 6 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình phân giác góc nhọn:

$$\frac{7x + y + 6}{\sqrt{50}} + \frac{x - y + 2}{\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow 7x + y + 6 + 5x - 5y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x - 4y + 16 = 0 \Rightarrow 3x - y + 4 = 0$$

Bài 70. Cho d: $3x - y - 4 = 0$, d': $2x + 6y + 3 = 0$. Tìm phương trình đường phân giác của góc tạo bởi d và d' mà có chứa gốc 0.

Giải

Gọi $f(x; y) = 3x - y - 4 \Rightarrow f(0; 0) = -4$

$\varphi(x; y) = 2x + 6y + 3 \Rightarrow \varphi(0; 0) = 3$

$\Rightarrow$ Phương trình cần tìm là $\dfrac{3x - y - 4}{\sqrt{10}} = -\left(\dfrac{2x + 6y + 3}{\sqrt{40}}\right)$

$\Leftrightarrow 6x - 2y - 8 = -2x - 6y - 3 \Leftrightarrow 8x + 4y - 5 = 0.$

Bài 71. Cho tam giác ABC có A(2; 0), B(4; 1), C(1; 2). Tìm phương trình đường phân giác trong góc A.

Giải

$AB = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{5}$: ABC là tam giác cân tại A nên phân giác trong góc A là trung tuyến AM với $M\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Phương trình $AM: \frac{x-2}{\frac{5}{2}-2} = \frac{y}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow 3x - y - 6 = 0$

Bài 72. Cho tam giác, phương trình các cạnh là:

AB: $x - y + 4 = 0$

AC: $7x + y - 12 = 0$

BC: $3x + 5y + 4 = 0$

a. Lập phương trình đường phân giác góc A.

b. Không vẽ hình, cho biết điểm O ở trong hay ở ngoài tam giác ABC.

Giải

a. Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y = -4 \\ 7x + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(1;5)$$

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y = -4 \\ 3x + 5y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-24}{8} = -3 \\ y = \dfrac{8}{8} = 1 \end{cases} \Rightarrow B(-3;\ 1)$$

Tọa độ đỉnh C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 7x + y = 12 \\ 3x + 5y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{64}{32} = 2 \\ y = \dfrac{-64}{32} = -2 \end{cases} \Rightarrow C(2;\ -2)$$

Gọi D là chân đường phân giác trong góc A trên cạnh BC:

$$\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{AB}{AC} = -\frac{\sqrt{16+16}}{\sqrt{1+49}} = \frac{-4\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{DB} = -4\overrightarrow{DC}$$

Gọi D(x; y) thì $\overrightarrow{DB} = (-3 - x;1 - y) \Rightarrow 5\overrightarrow{DB} = (-15 - 5x;5 - 5y)$

$$\overrightarrow{DC} = (2 - x;-2 - y) \Rightarrow -4\overrightarrow{DC} = (-8 + 4x;8 + 4y)$$

$$5\overrightarrow{DB} = -4\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -15 - 5x = -8 + 4x \\ 5 - 5y = 8 + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{9} \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{7}{9};-\frac{1}{3}\right)$$

Phân giác trong góc A là đường thẳng qua A, D:

$$\frac{x-1}{-\frac{7}{9}-1} = \frac{y-5}{-\frac{1}{3}-5} \Leftrightarrow \frac{x-1}{\frac{-16}{9}} = \frac{y-5}{\frac{-16}{3}} \Leftrightarrow 3(x-1) = y-5$$

$$\Leftrightarrow 3x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0$$

b. O ở trong tam giác ABC. (do A ∈ (I), B ∈ (II), C ∈ (IV)) (I), (II), (III), (IV) là các góc phần tư do hệ trục Oxy phân chia).

Bài 73. Cho tam giác ABC. Phương trình các cạnh là:

AB: $4x + 3y - 1 = 0$

AC: $3x + 4y - 6 = 0$

BC: $y = 0$

a. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A và tính diện tích tam giác ABC.

b. Định tâm và tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác

Giải

a. Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-14}{7} = -2 \\ y = \dfrac{21}{7} = 3 \end{cases} \Leftarrow A\,(-2;3)$$

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B\left(\frac{1}{4};0\right)$$

Tọa độ đỉnh C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C(2;0)$$

Gọi D(x; y) là chân đường phân giác trong góc A trên cạnh BC thì

$$\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{AB}{AC} = -\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{4}+2\right)^2 + (-3)^2}}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = -\frac{\frac{15}{4}}{5} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{DB} = -3\overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{DB} = \left(\frac{1}{4} - x; -y\right) \Rightarrow 4\overrightarrow{DB} = (1 - 4x; -4y)$$

$$\overrightarrow{DC} = (2 - x; -y) \Rightarrow -3\overrightarrow{DC} = (-6 + 3x; 3y)$$

$$4\overrightarrow{DB} = -3\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4x = -6 + 3x \\ -4y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad D(1;\,0)$$

Phân giác trong góc A là đường thẳng qua A, D

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-3} \Leftrightarrow \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$$

$$h_a = d(A, BC) = \frac{|3|}{1} = 3$$

$$BC = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{4}\right)^2 + 0^2} = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}.\frac{7}{4}.3 = \frac{21}{8} \text{ đơn vị diện tích}$$

b. Gọi I (x; y) là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC: I cũng là chân đường phân giác trong góc B trên cạnh BD.

$$\frac{\overrightarrow{ID}}{\overrightarrow{IA}} = \frac{-BD}{BA} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{15}{4}} = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AI}$$

$$\overrightarrow{ID} = (1 - x; -y) \Rightarrow 5\overrightarrow{ID} = (5 - 5x; -5y)$$

$$\overrightarrow{AI} = (x + 2; y - 3)$$

$$5\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 5x = x + 2 \\ -5y = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = +\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Bán kính đường tròn nội tiếp $\pi = d(I; BC) = \frac{\left|\frac{1}{2}\right|}{1} = \frac{1}{2}$.

Bài 74. Cho tam giác ABC với A(2; 3), B(1; 1), C(6; 5)

a. Tính các cạnh AB, AC và tọa độ điểm M sao cho $2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$.

b. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

Giải

a. $AB = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(6-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Gọi: M(x; y)

$\overrightarrow{BM} = (x - 1; y - 1) \Rightarrow 2\overrightarrow{BM} = (2x - 2; 2y - 2)$

$\overrightarrow{MC} = (6 - x; 5 - y)$

$$2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 6 - x \\ 2y - 2 = 5 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{7}{3} \end{cases} M\left(\frac{8}{3};\frac{7}{3}\right)$$

b. Gọi D(x; y) là chân của phân giác trong góc A trên cạnh BC:

$$\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{AB}{AC} = \frac{-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{DB} = (1 - x; 1 - y) \Rightarrow 2\overrightarrow{DB} = (2 - x; 2 - 2y)$$

$$\overrightarrow{CD} = (x - 6; y - 5)$$

$$2\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2x = x - 6 \\ 2 - 2y = y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{8}{3};\frac{7}{3}\right)$$

* Cũng có thể dùng công thức tính tọa độ điểm M trên điểm AB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ ở trang 3 để có kết quả tương tự.

Phân giác trong góc A là đường thẳng đi qua A, D:

$$\frac{x - 2}{\frac{8}{3} - 2} = \frac{y - 3}{\frac{7}{3} - 3} \Leftrightarrow \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 3}{-2} \Leftrightarrow \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 3}{-1}$$

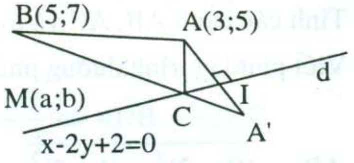
$$\Leftrightarrow -x + 2 = y - 3 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0$$

Bài 75. Cho hai số a, b thỏa a – 2b + 2 = 0. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a - 3)^2 + (b - 5)^2} + \sqrt{(a - 5)^2 + (b - 7)^2} \geq 6$$

Giải

Gọi M(a; b) là điểm tùy ý thuộc đường thẳng d: x – 2y + 2 = 0 và xem hai điểm A(3; 5), B(5; 7)



Gọi A'(x; y) là điểm đối xứng của A qua d. Phương trình đường thẳng AA' có dạng: 2x + y + C = 0 qua A ⇔ C = –11

AA': 2x + y – 11 = 0

AA' cắt d tại I. Tọa độ I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \quad I(4; 3)$$

I là trung điểm AA':

$$\left.\begin{array}{l} x_{A'} = 8 - 3 = 5 \\ y_{A'} = 6 - 5 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow A'(5; 1) \Rightarrow A'B = 6$$

A'B cắt d tại C thì CA + CB = CA' + CB = A'B = 6

$\forall M(a; b) \neq C$ thì AM + BM $\geq$ A'B (bất đẳng thức tam giác)

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2 + (b-5)^2} + \sqrt{(a-5)^2 + (b-7)^2} \geq 6$ (điều phải chứng minh)

◆ Lời bình: Là bài tập có lời giải công phu, gọn và đòi hỏi tính toán chính xác. Lời giải cung cấp cho độc giả phương pháp suy nghĩ khi giải bài tập. Nhưng cũng còn lưu ý rằng có thể nghĩ được, biết làm mà làm không được do kĩ thuật tính toán chưa tốt.

Bài 76. Cho bốn số thức a, b, c, d thỏa a + 2b = 9, c + 2d = 4. Chứng minh:

$$\sqrt{(a-6)^2 + (b-4)^2} + \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} + \sqrt{(c-2)^2 + (d+4)^2} \geq 4\sqrt{5}.$$

Giải

- Gọi : $\left.\begin{array}{l} d_1 \text{ là đường thẳng } x + 2y - 9 = 0 \\ d_2 \text{ là đường thẳng } x + 2y - 4 = 0 \end{array}\right\} d_1 // d_2$

Xét vị trí 2 điểm A(6; 4), B(2; –4) đối với d_1, d_2:

Gọi $f(x; y) = x + 2y - 9 \Rightarrow f(6; 4) = 6 + 8 - 9 = 5$

$f(2; -4) = 2 + 2(-4) - 9 = -15$

$\Rightarrow$ A và B ở hai phía khác nhau đối với d_1

$\varphi(x; y) = x + 2y - 4$

$\varphi(6; 4) = 6 + 8 - 4 = 10$

$\varphi(2; -4) = 2 - 8 - 4 = -10$

$\Rightarrow$ A và B ở hai phía trái khác nhau đối với d_2

$AB = \sqrt{(2-6)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}$

Xem hai điểm M(a; b), N(c; d)

Từ AM + MN + BN $\geq$ AB

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-6)^2 + (b-4)^2} + \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} + \sqrt{(c-2)^2 + (d+4)^2} \geq 4\sqrt{5}$.

◆ Lời bình: Là bài tập có lời giải công phu, gọn và đòi hỏi tính toán chính xác. Lời giải cung cấp cho độc giả phương pháp suy nghĩ khi giải bài tập. Nhưng cũng còn lưu ý rằng có thể nghĩ được, biết làm mà làm không được do kĩ thuật tính toán chưa tốt.

Bài 77. Với mọi số thực x chứng minh rằng: $\left|\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 10x + 50}\right| \le 5$

Giải

Xem ba điểm $M(x; 0)$, $A(2; 1)$, $B(5; 5)$

$$MA = \sqrt{(2 - x)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

$$MB = \sqrt{(5 - x)^2 + 5^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 50}$$

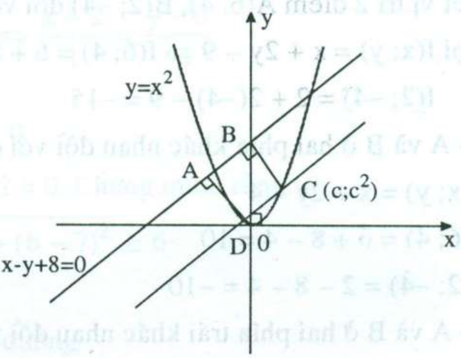
$$AB = \sqrt{(5 - 2)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Từ $|MA - MB| \le AB \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

♦ Lời bình: Là bài tập có lời giải công phu, gọn và đòi hỏi tính toán chính xác. Lời giải cung cấp cho độc giả phương pháp suy nghĩ khi giải bài tập. Nhưng cũng còn lưu ý rằng có thể nghĩ được, biết làm mà làm không được do kĩ thuật tính toán chưa tốt.

Bài 78*. Cho hình vuông ABCD có cạnh AB nằm trên đường thẳng d: $x - y + 8 = 0$, hai đỉnh C, D nằm trên parabol (P): $y = x^2$. Tính diện tích hình vuông

Giải



Xem hình vẽ

Gọi $C(c; c^2)$

- Phương trình cạnh BC có dạng:

$x + y + m = 0$ qua C

$\Leftrightarrow c + c^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -c^2 - c$

BC: $x + y - c^2 - c = 0$

$\Rightarrow$ Tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y = c^2 + 2 \\ x - y = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c^2 + c - 8}{2} \\ y = \dfrac{c^2 + c + 8}{2} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{c^2 + c - 8}{2}; \frac{c^2 + c + 8}{2}\right)$$

- Phương trình cạnh CD có dạng:

$x - y + n = 0$ qua C $\Leftrightarrow c - c^2 + n = 0 \Leftrightarrow n = c^2 - c$

CD: $x - y + c^2 - c = 0$

Phương trình hoành độ giao điểm của CD và (P):

$x^2 = x + c^2 - c \Leftrightarrow x^2 - x - (c^2 - c) = 0 \quad (*)$

$\Delta = 1 + 4(c^2 - c) = 4c^2 - 4c + 1 = (2c - 1)^2$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 - 2c + 1}{2} = 1 - c \\ x = \dfrac{1 + 2c - 1}{2} = c \end{array}\right. \Rightarrow D\left(1 - c; (1 - c)^2\right)$$

- Phương trình cạnh AD có dạng:

$x + y + p = 0$ qua D $\Leftrightarrow (1 - c) + (1 + c)^2 + p = 0$

$\Leftrightarrow p = -(1 - c)^2 - (1 - c) = -(1 - c)(1 - c + 1) = (c - 1)(2 - c) = -c^2 + 3c - 2$

$\Rightarrow$ AD: $x + y - c^2 + 3c - 2 = 0$

Tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y = c^2 - 3c + 2 \\ x - y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c^2 - 3c - 6}{2} \\ y = \dfrac{c^2 - 3c + 10}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{c^2 - 3c - 6}{2}; \frac{c^2 - 3c + 10}{2}\right).$$

Với các kết quả đã tìm được thì ABCD là hình chữ nhật. Để ABCD là hình vuông, cần và đủ là:

$$AB^2 = \left(\frac{4c - 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{4c - 2}{2}\right)^2$$

$$AB^2 = 2(2c - 1)^2$$

$$BC^2 = \left(c - \frac{c^2 + c + 8}{2}\right)^2 + \left(c^2 - \frac{c^2 + c + 8}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(-c^2 + c - 8)^2}{4} + \frac{(-c^2 - c - 8)^2}{4} = \frac{(c^2 - c - 8)^2}{2}$$

$$AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2(2c - 1)^2 = \frac{(c^2 - c - 8)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(2c - 1)^2 = (c^2 - c - 8)^2$$

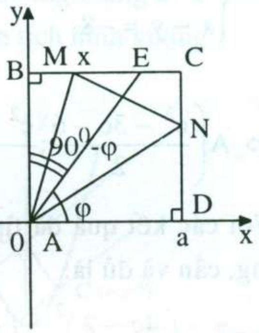
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(2c-1) = c^2 - c - 8 \\ 2(2c-1) = -c^2 + c + 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c^2 - 5c - 6 = 0 \\ c^2 + 3c - 10 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} c = -1 \\ c = 6 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} c = -5 \\ c = 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} AB^2 = 18 \\ AB^2 = 242 \end{array}\right.$$

♦ Lời bình: Là bài tập có lời giải công phu, gọn và đòi hỏi tính toán chính xác. Lời giải cung cấp cho độc giả phương pháp suy nghĩ khi giải bài tập. Nhưng cũng còn lưu ý rằng có thể nghĩ được, biết làm mà làm không được do kĩ thuật tính toán chưa tốt.

Bài 79*. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E. Đường phân giác trong của góc $\widehat{BAE}$ và $\widehat{EAD}$ lần lượt cắt BC và CD tại M và N. Chứng minh $MN \perp AE$.

Giải

Đặt hình vuông ABCD (cạnh a) vào hệ trục Oxy như hình vẽ:



$A \equiv 0$: $A(0;0)$, $B(0;a)$, $C(a;a)$, $D(a;0)$

Đặt $BE = x \Rightarrow E(x;a)$

$OE = \sqrt{a^2 + x^2}$

- AM là phân giác trong góc $\widehat{BAE}$:

$$\frac{ME}{BM} = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BE - BM}{BM} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{BM} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + 1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + a}{a}$$

$$\Rightarrow BM = \frac{ax\left(\sqrt{a^2 + x^2} - a\right)}{x^2} = \frac{a\left(\sqrt{a^2 + x^2} - a\right)}{x}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{a\sqrt{a^2 + x^2} - a}{x}; a\right)$$

- Đặt góc $\widehat{EAD} = \varphi$ thì $\widehat{BAE} = 90^0 - \varphi$

Tam giác vuông BAE có $\sin(90^0 - \varphi) = \cos\varphi = \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

Đặt: $\tan\frac{\varphi}{2} = t$ thì $\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = T$

$$\Leftrightarrow 1 - t^2 = T + T.t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{1-T}{1+T} = \frac{1-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+x^2}-x}{\sqrt{a^2+x^2}+x} = \frac{a^2}{\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right)^2} \Rightarrow \tan\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}+x}$$

Tam giác vuông AND cho:

$$DN = AD.\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}+x} = \frac{a^2\left(\sqrt{a^2+x^2}-x\right)}{a^2}$$

$$\Rightarrow DN = \left(\sqrt{a^2+x^2}-x\right) \Rightarrow N\left(a;\sqrt{a^2+x^2}-x\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(a - \frac{\left(a\sqrt{a^2+x^2}-a\right)}{x};\sqrt{a^2+x^2}-x-a\right)$$

$\overrightarrow{AE} = (x; a)$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AE} = ax - a\sqrt{a^2+x^2} + a^2 + a\sqrt{a^2+x^2} - ax - a^2 = 0$

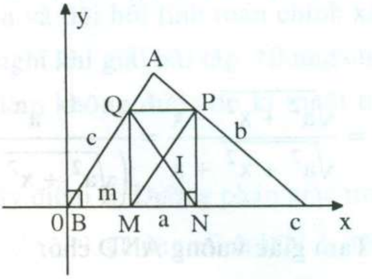
$\Leftrightarrow MN \perp AE$ (điều phải chứng minh).

♦ Lời bình: Là bài tập có lời giải công phu, gọn và đòi hỏi tính toán chính xác. Lời giải cung cấp cho độc giả phương pháp suy nghĩ khi giải bài tập. Nhưng cũng còn lưu ý rằng có thể nghĩ được, biết làm mà làm không được do kĩ thuật tính toán chưa tốt.

Bài 80. Cho tam giác ABC cố định, MNPQ là hình chữ nhật thay đổi có M, N thuộc cạnh BC, $P \in CA$, $Q \in AB$. Tìm tập hợp tâm các hình chữ nhật MNPQ.

Giải

Đặt tam giác ABC vào hệ trục Oxy như hình vẽ: $B \equiv 0$



Gọi $M(m; 0)$ $(0 \le m \le a)$

$$OQ = \frac{m}{\cos B} \Rightarrow AQ = c - OQ$$

$$= c - \frac{m}{\cos B}$$

$$\Rightarrow Q(m; m.\tan B)$$

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AB} \Leftrightarrow \frac{PQ}{a} = \frac{c - \dfrac{m}{\cos B}}{c}$$

$$= 1 - \frac{m}{c.\cos B} \Rightarrow PQ = a - \frac{a.m}{c.\cos B}$$

$$\Rightarrow BN = BM + MN = BM + PQ = m + a - \frac{a.m}{c.\cos B}$$

$$\Rightarrow N\left(m + a - \frac{a.m}{c.\cos B}; 0\right)$$

I là trung điểm QN: $I\begin{cases} x = \dfrac{2m + a - \dfrac{a.m}{c.\cos B}}{2} & (1) \\ y = \dfrac{m.\tan B}{2} & (2) \end{cases}$

Khử m: từ (2) $m = \dfrac{2y}{\tan B}$. Thay vào (1)

$$x = \frac{\dfrac{4y}{\tan B} + a - \dfrac{\dfrac{2y}{\tan B}.a}{c.\cos B}}{2} = \frac{2y}{\tan B} + \frac{a}{2} - \frac{ay}{c.\sin B}$$

$$\Leftrightarrow x + \left(\frac{a}{c.\sin B} - \frac{2}{\tan B}\right)y - \frac{a}{2} = 0 \ (3) \text{ với: } 0 \le \frac{2y}{\tan B} \le a \qquad (4)$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm I là một đoạn thẳng thỏa mãn (3) và (4).

Bài 81. Viết phương trình tổng quát của các đường thẳng:

a. $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$; b. $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$; c. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$.

Giải

a. $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -2 + 6t \\ 3y = 3 - 6t \end{cases} \Leftrightarrow 2x + 3y - 1 = 0$.

b. $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 - 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 16 - 4t \\ y = 3 - 4t \end{cases} \Leftrightarrow 4x - y = 13 \Leftrightarrow 4x - y - 13 = 0$.

c. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 + 10t \\ 2y = -4 + 10t \end{cases} \Leftrightarrow 5x - 2y = 9 \Leftrightarrow 5x - 2y - 9 = 0$.

Bài 82. Viết phương trình tham số của các đường thẳng sau:

a. $3x - 4y - 6 = 0$; b. $x - 3 = 0$; c. $y + 2 = 0$.

Giải

a. Đơn giản nhất: $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{3t - 6}{4} \end{cases}$ b. $\begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases}$ c. $\begin{cases} x = t \\ y = -2 \end{cases}$

Bài 83. Cho các đường thẳng d: $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$; d': $\begin{cases} x = 2 + 3t' \\ y = -2 - t' \end{cases}$.

Tìm tọa độ giao điểm của d và d'.

Giải

Từ các phương trình của d và d', tìm t, t' thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} 3 - 2t = 2 + 3t' \\ -1 + t = -2 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t' + 2t = 1 \\ t' + t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3}{1} = 3 \\ t' = \dfrac{-4}{1} = -4 \end{cases}$$

Thế t = 3 vào phương trình d: $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tọa độ giao điểm của d và d': A(–3; 2).

Bài 84. Biện luận theo m vị trí tương đối của hai đường thẳng

a. d_1: $4x - my + 4 - m = 0$; d_2: $(2m + 6)x + y - 2m - 1 = 0$

b. d_1: $mx + y + 2 = 0$; d_2: $x + my + m + 1 = 0$

Giải

a.

- Nếu $\dfrac{4}{2m + 6} \neq \dfrac{-m}{1} \Leftrightarrow -2m^2 - 6m \neq 4 \Leftrightarrow 2m^2 + 6m + 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -2 \end{cases}$: d_1 cắt d_2

- Nếu $m = -1$:

  $d_1: 4x + y + 5 = 0$

  $d_2: 4x + y + 1 = 0$: $d_1 \,//\, d_2$

- Nếu $m = -2$:

  $d_1: 4x + 2y + 6 = 0$

  $d_2: 2x + y + 3 = 0$, d_1 trùng d_2

b.

- Nếu $\dfrac{m}{1} \neq \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow m \neq \pm 1$: d_1 cắt d_2

- Nếu $m = 1$:

  $d_1: x + y + 2 = 0$

  $d_2: x + y + 2 = 0$ $\quad d_1$ trùng d_2

- Nếu $m = -1$:

  $$\left.\begin{aligned} d_1&: x + y + 2 = 0 \\ d_2&: x - y = 0 \end{aligned}\right\} d_1 \,//\, d_2$$

Bài 85. Cho hai đường thẳng:

$$d_1 : \begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + nt \end{cases};\quad d_2 : \begin{cases} x = x_2 + pt' \\ y = y_2 + qt' \end{cases}$$

(x_1, x_2, y_1, y_2: hằng số)

Tìm điều kiện cần tìm và đủ (viết theo m, n, p, q) để các đường thẳng ấy:

a. cắt nhau b. song song c. trùng nhau. d. vuông góc với nhau

Giải

d_1 có vec tơ chỉ phương $\vec{a} = (m; n)$ và đi qua $A(x_1; y_1)$

d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (p; q)$ và đi qua $B(x_2; y_2)$

a. d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow mq \neq np$.

b. $d_1 \,//\, d_2 \Leftrightarrow mq = np$, $\quad x_1 \neq x_2$ hoặc $y_1 \neq y_2$

c. d_1 trùng $d_2 \Leftrightarrow mq = np$, $\quad x_1 = x_2, y_1 = y_2$

d. d_1 vuông góc với $d_2 \Leftrightarrow m.p + n.q = 0$

Bài 86. Cho các đường thẳng $d_1: mx + y - 3 = 0$

$$d_2: x + my - 2m - 1 = 0$$

Tìm các giá trị nguyên của m để d_1 cắt d_2 tại điểm có tọa độ là các số nguyên.

Giải

Tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ: $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = 2m - 1 \end{cases}$

Để hệ có nghiệm ⇔ d_1 cắt d_2 thì $m^2 - 1 \neq 0$, $m \neq \pm 1$. Lúc đó:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3m - 2m + 1}{m^2 - 1} = \dfrac{m + 1}{m^2 - 1} = \dfrac{1}{m - 1} \\ y = \dfrac{4m - 1 - 3}{m^2 - 1} = \dfrac{4(m - 1)}{m^2 - 1} = \dfrac{4}{m + 1} \end{cases}$$

$$\text{Để: } \begin{array}{l} x \in \mathbb{Z} \text{ thì} \\ y \in \mathbb{Z} \text{ thì} \end{array} \begin{cases} m - 1 = \pm 1 \\ \left[\begin{array}{l} m + 1 = \pm 1 \\ m + 1 = \pm 2 \\ m + 1 = \pm 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2 \\ m = -3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \\ m = -5 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Khi m = 0: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$.

Bài 87. Cho $a^2 + b^2 > 0$ và hai đường thẳng:

d_1: $(a - b)x + y - 1 = 0$, d_2: $(a^2 - b^2)x + ay - b = 0$

a. Xác định giao điểm của d_1 và d_2.

b. Tìm điều kiện để giao điểm nằm trên trục hoành.

Giải

a. Tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (a - b)x + y = 1 \\ (a^2 - b^2)x + ay = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a - b}{a^2 - b^2 - a^2 + ab} = \dfrac{-1}{b} \\ y = \dfrac{a - b - (a^2 - b^2)}{a^2 - b^2 - a^2 + ab} = \dfrac{1 - a - b}{b} \end{cases} (b \neq 0,\ a \neq b)$$

b. Để giao điểm nằm trên Ox thì a + b = 1.

Bài 88. Tính diện tích hình vuông có bốn đỉnh nằm trên hai đường thẳng song song: d_1: $4x + 3y + 3 = 0$; d_2: $4x + 3y + 18 = 0$.

Giải

Cạnh hình vuông bằng khoảng cách giữa d_1 và d_2.

Chọn $A(0; -1) \in d_1$

$$d(A, d_2) = \frac{|4.0 + 3(-1) + 18|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 3$$

⇒ Diện tích hình vuông nói trong đề toán = 9 đơn vị diện tích.

Bài 89. Cho hai điểm A(1; 1), B(7; 4) và đường thẳng d: 2x – y – 4 = 0. Chứng minh rằng d cắt đoạn AB tại một điểm M. Tính tỉ số $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

Giải

Phương trình đường thẳng chứa đoạn AB:

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{3} \Leftrightarrow x - 1 = 2(y-1) \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{5} \\ y = \dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{5};\frac{6}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{MA} = \left(1 - \frac{7}{5}; 1 - \frac{6}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{MB} = \left(7 - \frac{7}{5}; 4 - \frac{6}{5}\right) = \left(\frac{28}{5}; \frac{14}{5}\right)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{MB} = -14.\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow$ điểm M ở bên trong đoạn AB và $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{-1}{14}$

Bài 90. Cho hai đường thẳng d, d’ có phương trình chung là:

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$ với $B^2 - AC > 0$

a. Chứng tỏ rằng d, d’ là hai đường thẳng phân biệt. Viết phương trình tổng quát của d, d'.

b. Viết phương trình của các đường phân giác của các góc tạo bởi d, d'.

Giải

a. Coi: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$ là tam thức bậc hai của x. tam thức này có:

$$\Delta' = B^2y^2 - ACy^2 = (B^2 - AC)y^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = y\sqrt{B^2 - AC}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-By - y\sqrt{B^2 - AC}}{A} = \dfrac{-\left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)y}{A} \\ x_2 = \dfrac{-By + y\sqrt{B^2 - AC}}{A} = \dfrac{-\left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right).y}{A} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A\left(x + \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{2}y\right)\left(x + \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{2}y\right)$$

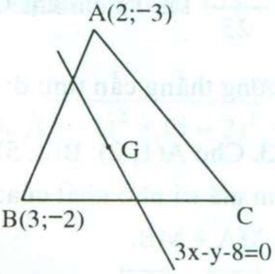
$$= \frac{A}{4}\left[2x + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)y\right].\left[2x + \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right).y\right]$$

⇒ Phương trình của 2 đường phân giác của các góc tạo bởi d, d'.

$$\frac{2x + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)y}{\sqrt{4 + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)^2}} \pm \frac{2x + \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)y}{\sqrt{4 + \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)^2}} = 0.$$

Bài 91. Cho tam giác ABC có diện tích S = 3. Hai đỉnh là A(2; −3), B(3; −2) và trọng tâm tam giác thuộc đường thẳng 3x − y − 8 = 0. Tìm tọa độ đỉnh C.

Giải



Gọi G(g; 3g − 8) thì theo hệ thức trọng tâm

$x_C + 2 + 3 = 3g \Leftrightarrow x_C = 3g - 5$

$y_C - 3 - 2 = 9g - 24 \Leftrightarrow y_C = 9g - 19$

$\Rightarrow C(3g - 5; 9g - 19)$

$AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Phương trình cạnh AB:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{1} \Leftrightarrow x - y - 5 = 0$$

$$d(C;AB) = \frac{|3g - 5 - 9g + 19 - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{3|g-3|}{\sqrt{2}} = h_c$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.h_c = \frac{1}{2}.\sqrt{2}.\frac{3|g-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3|g-3|}{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow |g-3| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g - 3 = 2 \\ g - 3 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g = 5 \\ g = 1 \end{array}\right.$$

g = 5 thì C(10; 26).

g = 1 thì C(−2; −10).

Bài 92. Cho 3 điểm A(−2; 3), B(3; −5), C(−4; 5) và vectơ $\vec{a} = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$. Tìm phương trình của đường thẳng d có $\vec{a}$ làm vectơ chỉ phương, sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ A, B, C đến đường thẳng d là nhỏ nhất.

Giải

Thấy ngay $\left|\vec{a}\right| = 1$. Phương trình d có dạng: $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + C = 0$

$$d(A;d) = \left|-\frac{6}{5} - \frac{12}{5} + C\right| = \left|C - \frac{18}{5}\right|$$

$$d(B;d) = \left|\frac{9}{5} + \frac{20}{5} + C\right| = \left|C + \frac{29}{5}\right|$$

$$d(C;d) = \left|-\frac{12}{5} - \frac{20}{5} + C\right| = \left|C - \frac{32}{5}\right|$$

$$\left|C - \frac{18}{5}\right|^2 + \left|C + \frac{29}{5}\right|^2 + \left|C - \frac{32}{5}\right|^2 = 3C^2 - \frac{42}{5}C + \frac{2189}{25}$$

$$= \left(C^2 - \frac{14}{5}C + \frac{49}{25}\right) + \frac{2189}{25} - \frac{147}{25} = 3\left(C - \frac{7}{5}\right)^2 + \frac{2042}{25} \geq \frac{2042}{25}$$

$\Rightarrow$ Tổng bình phương các khoảng cách từ A, B, C đến d đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{2042}{25}$ khi và chỉ khi $C = \frac{7}{5}$.

Đường thẳng cần tìm: d: $\frac{3x}{5} - \frac{4y}{5} + \frac{7}{5} = 0$.

Bài 93. Cho A(1; 2), B(2; 5). Điểm M di động trên đường thẳng d: $x - 2y - 2 = 0$

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

α. MA + MB.

β. $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$.

b. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|MA - MB|$

Giải

a. Gọi M(2m + 2; m)

$$MA = \sqrt{(1 - 2m - 2)^2 + (2 - m)^2} = \sqrt{5m^2 + 5} = \sqrt{5}\left(\sqrt{m^2 + 1}\right)$$

$$MB = \sqrt{(2 - 2m - 2)^2 + (5 - m)^2} = \sqrt{5m^2 - 10m + 25}$$

$$= \sqrt{5}\left(\sqrt{m^2 - 2m + 5}\right)$$

$$\Rightarrow MA + MB = \sqrt{5}\left(\sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{(1 - m)^2 + 4}\right)$$

α. Xét hai vectơ: $\left.\begin{array}{l}\vec{a} = (m;1)\\ \vec{b} = (1 - m;2)\end{array}\right\} \vec{a} + \vec{b} = (1;3)$

Từ: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| \Leftrightarrow \sqrt{10} \leq \sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{(1 - m)^2 + 4}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}.\sqrt{10} \leq \sqrt{5}\left(\sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{m^2 - 2m + 5}\right)$$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{2} \leq MA + MB \Rightarrow MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất là $5\sqrt{2}$.

β. $\overrightarrow{MA} = (-2m - 1; 2 - m)$

$\overrightarrow{MB} = \left(-2m; 5 - m\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (-4m - 1; 7 - 2m)$

$$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)^2 = 16m^2 + 8m + 1 + 4m^2 - 28m + 49$$

$$= 20m^2 - 20m + 50 = 20(m^2 - m + \frac{1}{4}) - 5 + 50$$

$$= 20\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + 45 \geq 45$$

$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| \geq 3\sqrt{5} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ có giá trị nhỏ nhất là $3\sqrt{5}$

b. Rõ ràng $\forall m \in d$ thì $|MA - MB| \geq 0$

Khi M, A, B thẳng hàng thì $|MA - MB| = AB\sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10}$

Lúc này $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Kết luận: $0 \leq |MA - MB| \leq \sqrt{10}$.

Bài 94. Cho bốn điểm A(a; 0), B(0; b), M(m; 0), N(0; n) trong đó a, b là hằng số m, n thay đổi sao cho $\dfrac{\overline{OM}}{\overline{OA}} + \dfrac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = 2$. Tìm tập hợp các giao điểm của các đường thẳng AN, BM.

Giải

Giả sử AN cắt BN tại I:

Giả thiết $\dfrac{\overline{OM}}{\overline{OA}} + \dfrac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{m}{a} + \dfrac{n}{b} = 2 \quad (*)$

Phương trình đường thẳng AN: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{n} = 1 \quad (1)$

Phương trình đường thẳng BM: $\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{b} = 1 \ (2)$

Từ (1) có: $n = \dfrac{ay}{a - x}$, từ (2) có $m = \dfrac{bx}{b - y}$ thế vào (*):

$$\frac{bx}{a(b-y)} + \frac{ay}{b(a-x)} = 2 \Leftrightarrow bx.b(a-x) + ay.a(b-y) = 2ab(a-x)(b-y)$$

$$\Leftrightarrow bx.b(a-x) - ab(a-x)(b-y) + ay.a(b-y) - ab(a-x)(b-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow b(a-x)\left[bx - a(b-y)\right] + a(b-y)\left[ay - b(a-x)\right] = 0$$

$\Leftrightarrow$ b(a – x)(bx + ay – ab) + a(b – y)(bx + ay – ab) = 0

$\Leftrightarrow$ (bx + ay – ab)(ab – bx + ab – ay) = 0

$\Leftrightarrow$ (bx + ay – ab)(2ab – (bx + ay)) = 0

$\Leftrightarrow$ bx + ay – 2ab = 0 (bx + ay – ab $\neq$ 0 vì I $\notin$ AB).

Tập hợp điểm I là đường thẳng bx + ay – 2ab = 0 $\Leftrightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2$.

Bài 95. Gọi (H) là hyperbol có phương trình x.y = 1, A, B, C là 3 điểm khác nhau trên (H). Chứng minh rằng trực tâm tam giác ABC ở trên (H).

Giải

Gọi $A\left(a;\dfrac{1}{a}\right)$, $B\left(b;\dfrac{1}{b}\right)$, $C\left(c;\dfrac{1}{c}\right)$ là 3 điểm khác nhau trên (H) và H(x; y) là trực tâm của tam giác ABC.

$\overrightarrow{AH} = \left(x - a; y - \dfrac{1}{a}\right)$

$\overrightarrow{BC} = \left(c - b; \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)$ cùng phương với $\vec{a} = \left(1; -\dfrac{1}{bc}\right)$

$\overrightarrow{BH} = \left(x - b; y - \dfrac{1}{b}\right)$

$\overrightarrow{AC} = \left(c - a; \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)$ cùng phương với $\vec{b} = \left(1; -\dfrac{1}{ac}\right)$

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow x - a - \dfrac{1}{bc}\left(y - \dfrac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{bc} = a - \dfrac{1}{abc}$

$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow x - b - \dfrac{1}{ac}\left(y - \dfrac{1}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{ac}y = b - \dfrac{1}{abc}$

Tọa độ H là nghiệm của hệ:

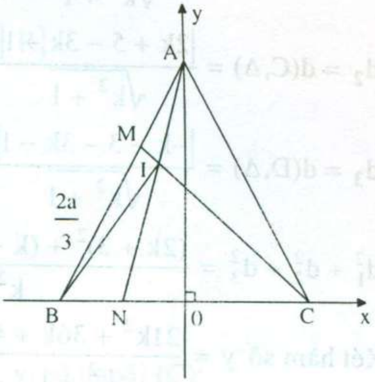
$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{bc}y = a - \dfrac{1}{abc} \\ x - \dfrac{1}{ac}y = b - \dfrac{1}{abc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{abc} \\ y = -abc \end{cases}. \text{ Vậy } H\left(-\dfrac{1}{abc}; -abc\right)$$

$\Rightarrow$ H $\in$ (H) (điều phải chứng minh)

Bài 96. Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh AB và BC, lần lượt lấy các điểm M và N thỏa $AM = \dfrac{1}{3}AB$, $BN = \dfrac{1}{3}BC$; AN cắt CM tại I. Chứng minh rằng BI vuông góc với CM.

Giải

Đặt tam giác đều ABC vào hệ trục Oxy như hình vẽ. Nếu cạnh tam giác đều AB = a thì:



$A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$, $B\left(-\frac{a}{2};0\right)$, $C\left(\frac{a}{2};0\right)$,

$M\left(-\frac{a}{6};\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$, $N\left(-\frac{a}{6};0\right)$

Phương trình đường thẳng CM:

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{-\frac{a}{6}-\frac{a}{2}}=\frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}\Leftrightarrow\frac{x-\frac{a}{2}}{-\frac{2a}{3}}=\frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-\frac{a}{2}}{-2}=\frac{y}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\sqrt{3}x-\frac{a\sqrt{3}}{2}=-2y\Leftrightarrow\sqrt{3}x+2y-\frac{a\sqrt{3}}{2}=0$$

Phương trình đường thẳng AN:

$$\frac{x}{-\frac{a}{6}}+\frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=1\Leftrightarrow 6x\sqrt{3}-2y+a\sqrt{3}=0$$

Tọa độ điểm I (giao điểm của CM và AN) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}6\sqrt{3}x-2y=-a\sqrt{3}\\ \sqrt{3}x+2y=\frac{a\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{-a\sqrt{3}}{14\sqrt{3}}=-\frac{a}{14}\\ y=\frac{12a}{14\sqrt{3}}=\frac{6a}{7\sqrt{3}}\end{cases}:\ I\left(-\frac{a}{14};\frac{6a}{7\sqrt{3}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BI}=\left(\frac{3a}{7};\frac{6a}{7\sqrt{3}}\right)\\ \overrightarrow{CM}=\left(-\frac{2a}{3};\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\end{array}\right\}\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CM}=\frac{-6a^2}{21}+\frac{6a^2}{21}=0\Rightarrow \text{điều phải chứng minh.}$$

Bài 97. Cho bốn điểm A(3; –1), B(1; 2), C(2; –5), D(–1; 3). Một đường thẳng Δ quay quanh điểm A. Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các khoảng cách từ B, C, D đến Δ.

Chứng minh rằng có hai vị trí của Δ để $d_1^2+d_2^2+d_3^2$ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Khi đó, hai đường thẳng Δ tìm được là vuông góc với nhau.

Giải

Phương trình Δ có dạng $y=k(x-3)-1\Leftrightarrow kx-y-3k-1=0$

$$d_1 = d(B.\Delta) = \frac{|k - 2 - 3k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$d_2 = d(C,\Delta) = \frac{|2k + 5 - 3k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|k - 4|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

$$d_3 = d(D,\Delta) = \frac{|-k - 3 - 3k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|4k + 4|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \frac{(2k + 3)^2 + (k - 4)^2 + (4k + 4)^2}{k^2 + 1} = \frac{21k^2 + 36k + 41}{k^2 + 1}$$

Xét hàm số $y = \dfrac{21k^2 + 36k + 41}{k^2 + 1}$

Trên R, $y'_k = \dfrac{-36k^2 - 40k + 36}{(k^2 + 1)^2} = \dfrac{-4(9k^2 + 10k - 9)}{(k^2 + 1)^2}$

$y'_k = 0$ và đổi dấu tại k_1, k_2 và $k_1.k_2 = -1$. (*)

Bảng biến thiên:

k	$-\infty$		k_1		k_2		$+\infty$
y'_k		$-$	0	$+$	0	$-$	
y_k	21	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	21

Từ bảng biến thiên và từ (*) ⇒ điều phải chứng minh.

Chương III. ĐƯỜNG TRÒN

I. TÓM TẮT GIÁO KHOA

- Định nghĩa: Đường tròn (C) = $\{M(x;y) \setminus IM = R\}$

  I(a; b): tâm; R: bán kính

- Phương trình: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

  Hoặc: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + C = 0$

  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - C}$

- Phương trình tiếp tuyến tại $M_0(x_0; y_0) \in (C)$:

  $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$

- Cách viết phương trình tiếp tuyến qua điểm $A(x_1; y_1)$ ở ngoài (C):

  – Gọi $M_0(x_0; y_0) \in (C) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + C = 0$ (1)

  + Viết (T): $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$

  + Cho (T) qua A $\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y_1 - y_0) = 0$ (2)

  – Giải hệ (1) và (2) tìm x_0, y_0

II. ĐỀ TOÁN VÀ LỜI GIẢI

Bài 98. Lập phương trình đường tròn đường kính AB trong các trường hợp sau:

a. A(–1; 1), B(5; 3)   b. A(–1; –2), B(2; 1)

Giải

a. $AB = 2R = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10} \Rightarrow R = \sqrt{10}$

Tâm I (2; 2) $\Rightarrow$ Phương trình $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$

b. $AB = 2R\sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow R = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Tâm $I\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow$ Phương trình $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{2}$

Bài 99. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B, C trong các trường hợp sau:

a. A(1; 3), B(5; 6); C(7; 0)   b. A(0; 1), B(1; –1), C(2; 0)

Giải

a. Phương trình (C) có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + C = 9$

(C) qua A. $\Leftrightarrow 1 + 9 - 2a - 6b + C = 0 \Leftrightarrow 2a + 6b - C = 10$ (1)

(C) qua B $\Leftrightarrow 25 + 36 - 10a - 12b + C = 0 \Leftrightarrow 10a + 12b - C = 61$ (2)

(C) qua C $\Leftrightarrow 49 + 0 - 14a + C = 0 \Leftrightarrow 14a - C = 49$ (3)

Hệ (1), (2), (3) cho $a = \dfrac{9}{2}$, $b = \dfrac{5}{2}$, $C = 14$

(C): $x^2 + y^2 - 9x - 5y + 14 = 0$.

b. Phương trình (C) có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + C = 0$

(C) qua A $\Leftrightarrow 0 + 1 - 2b + C = 0 \Leftrightarrow 2b - C = 1$ (1)

(C) qua B $\Leftrightarrow 1 + 1 - 2a + 2b + C = 0 \Leftrightarrow 2a - 2b - C = 2$ (2)

(C) qua C $\Leftrightarrow 4 - 4a + C = 0 \Leftrightarrow 4a - C = 4$ (3)

Hệ (1), (2), (3) cho $a = \dfrac{5}{6}$, $b = \dfrac{1}{6}$; $c = -\dfrac{4}{6}$

Phương trình (C): $x^2 + y^2 - \dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3}y - \dfrac{4}{6} = 0$.

Bài 100. Lập phương trình đường tròn (C) tâm I(–4; 2) và tiếp xúc với đường thẳng d: $3x + 4y - 16 = 0$.

Giải

(C) có tâm I(–4; 2) và tiếp xúc d: $3x + 4y - 16 = 0$

$$\Leftrightarrow d(I; d) = R = \frac{|-12 + 8 - 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

$\Rightarrow$ Phương trình (C): $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$

Bài 101. Lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với các trục tọa độ và:

a. Đi qua điểm A(2; 4)

b. Có tâm trên đường thẳng d: $3x - 5y - 8 = 0$

Giải

a. Phương trình (C) có dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

- (C) tiếp xúc Ox $\Leftrightarrow |b| = R$ (1)
- (C) tiếp xúc Oy $\Leftrightarrow |a| = R$ (2)
- (C) qua A (2; 4) $\Leftrightarrow (2 - a)^2 + (4 - b)^2 = R^2$ (3)

Từ (1) và (2): $|a| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$

- Nếu $a = b = R$: $(2 - a)^2 + (4 - a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 12a + 20 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow R = 2 \\ a = 10 \Rightarrow b = 10 \Rightarrow R = 10 \end{array}\right.$$

Có hai đường tròn thỏa điều kiện:

(C_1): $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

(C_2): $(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$

- Nếu $a = -b$: $(2 - a)^2 + (4 + a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 + 4a + 20 = 0$ vô nghiệm

b. (C) tiếp xúc Ox $\Leftrightarrow |b| = R$ (1)

(C) tiếp xúc Oy $\Leftrightarrow |a| = R$ (2)

(C) có tâm $\in$ d $\Leftrightarrow 3a - 5b - 8 = 0$ (3)

- $a = b \Rightarrow 3a - 5a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = -4, b = -4, R = 4$

  Phương trình (C): $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$
- $a = -b$: $\Rightarrow 3a + 5a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 1, b = -1, R = 1$

  Phương trình (C): $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

  Hoặc: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Bài 102. Lập phương trình của đường tròn tiếp xúc với trục hoành tại A(–1; 0) và qua B(3; 2).

Giải

Phương trình đường tròn cần tìm có dạng: $(x - a)^2 - (y - b)^2 = R^2$

- Tiếp xúc trục Ox: $|b| = R$
- Tiếp xúc tại $A(-1; 0) \Leftrightarrow (-1 - a)^2 + b^2 = b^2 \Leftrightarrow a = -1$
- Đường tròn qua $B(3; 2) \Leftrightarrow (3 + 1)^2 + (2 - b)^2 = b^2$

  $\Leftrightarrow 16 + 4 - 4b + b^2 = b^2 \Leftrightarrow b = 5 = R$

  Đường tròn cần tìm: $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

Bài 103. Lập phương trình đường tròn có bán kính bằng 1, tiếp xúc với trục hoành và có tâm nằm trên đường thẳng $x + y - 3 = 0$.

Giải

Phương trình đường tròn cần tìm có dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

- $R = 1$
- Tiếp xúc trục hoành $|b| = R = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$
- $I(a; b) \in x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow a = b - 3 = 0$
  - + Nếu $b = 1 \Rightarrow a = 2$
  - + Nếu $b = -1 \Rightarrow a = 4$

Có hai đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán: (C_1): $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

(C_2): $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 1$.

Bài 104. Lập phương trình đường tròn đi qua A(4; 2) và tiếp xúc với hai đường thẳng d_1: $x - 3y - 2 = 0$ và d_2: $x - 3y + 18 = 0$.

Giải

Phương trình đường tròn (C) cần tìm có dạng: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Gọi I (a; b) là tâm của (C) thì:

(C): tiếp xúc $d_1 \Leftrightarrow \dfrac{|a - 3b - 2|}{\sqrt{10}} = R \quad (1)$

(C): tiếp xúc $d_2 \Leftrightarrow \dfrac{|a - 3b + 18|}{\sqrt{10}} = R \quad (2)$

(C): qua A(4; 2) $\Leftrightarrow (4 - a)^2 + (2 - b)^2 = R^2 \quad (3)$

Từ (1) và (2): $|a - 3b - 2| = |a - 3b + 18|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 3b - 2 = a - 3b + 18 \text{ (loại)} \\ a - 3b - 2 = -a + 3b - 18 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2a - 6b = -16 \Leftrightarrow a - 3b = -8 \Leftrightarrow b = \frac{a + 8}{3}$$

Thế vào (1): $R = \dfrac{|a - a - 8 - 2|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

Thế vào (3): $(4 - a)^2 + \left(2 - \dfrac{a + 8}{3}\right)^2 = 10$

$$\Leftrightarrow a^2 - 8a + 16 + \frac{a^2 + 4a + 4}{9} = 10$$

$$\Leftrightarrow 10a^2 - 68a + 58 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \Rightarrow b = 3 \\ a = \dfrac{29}{5} \Rightarrow b = \dfrac{23}{5} \end{array}\right.$$

Có hai đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán:

(C_1): $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$

(C_2): $\left(x - \dfrac{29}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{23}{5}\right)^2 = 10$

Bài 105. Lập phương trình đường tròn (C) có tâm trên đường thẳng x = 5 và tiếp xúc với hai đường thẳng d_1: $3x - y + 3 = 0$, d_2: $x - 3y + 9 = 0$.

Giải

Phương trình (C) có dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. I(a; b) là tâm của (C).

- I(a; b) thuộc đường thẳng $x = 5 \Leftrightarrow a = 5 \quad (1)$
- (C) tiếp xúc $d_1 \Leftrightarrow \dfrac{|3.5 - b + 3|}{\sqrt{10}} = R \quad (2)$
- (C) tiếp xúc $d_2 \Leftrightarrow \dfrac{|5 - 3b + 9|}{\sqrt{10}} = R \quad (3)$

Từ (2) và (3): $|18 - b| = |14 - 3b|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 18 - b = 14 - 3b \\ 18 - b = -14 + 3b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -2 \Rightarrow R = 2\sqrt{10} \\ b = 8 \Rightarrow R = \sqrt{10} \end{array}\right.$$

Có hai đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán:

(C_1): $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 40$

(C_2): $(x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 10$

Bài 106. Lập phương trình đường tròn (C) đi qua các điểm A(1; 2), B(3; 1) và có tâm trên đường thẳng d: $7x + 3y + 1 = 0$.

Giải

$\overrightarrow{AB} = (2; 1)$

M là trung điểm của AB: $M\left(2; \frac{3}{2}\right)$

(Δ) là đường trung trực của đoạn AB. Phương trình Δ có dạng $2x - y + C = 0$

Δ qua M $\Leftrightarrow 2.2 - \frac{3}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{5}{2}$

Tâm của đường tròn (C) là giao điểm của Δ và d:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ 7x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow\geq \begin{cases} x = \dfrac{13}{26} = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{-39}{26} = \dfrac{-3}{2} \end{cases} \quad I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

Bán kính (C) = IA $= \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

Phương trình (C): $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

Bài 107. Lập phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A(1; 2), B(3; 4) và tiếp xúc với đường thẳng d: $y = 3(1 - x)$.

Giải

Phương trình đường tròn (C) có dạng:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

(C) qua A $\Leftrightarrow (1 - a)^2 + (2 - b)^2 = R^2$ (1)

(C) qua B $\Leftrightarrow (3 - a)^2 + (4 - b)^2 = R^2$ (2)

d: $3x + y - 3 = 0$

(C) tiếp xúc d $\Leftrightarrow \dfrac{|3a + b - 3|}{\sqrt{10}} = R$ (3)

Trừ từng vế (1) và (2) được (1) và (2) $a + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 - a$

Thế vào (3) được $R = \dfrac{|2a+2|}{\sqrt{10}}$

Thế vào (1): $(1-a)^2 + (2-5+a)^2 = \dfrac{(2a+2)^2}{10}$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 8a + 10 = \frac{2(a+1)^2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 11a + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{3}{2} \Rightarrow b = \dfrac{7}{2} \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{5}{2}} \\ a = 4 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow R = \sqrt{10} \end{array}\right.$$

Có 2 đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán:

(C_1): $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{2}$

(C_2): $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$

Bài 108. Lập phương trình của đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng d: $3x - 4y - 31 = 0$ tại điểm $A(1; -7)$ và có đường kính bằng 5.

Giải

Phương trình đường tròn (C) có dạng: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 25$

Gọi $I(a; b)$; d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4;3)$

(C) tiếp xúc d tại A $\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + (-7-b)^2 = 25 & (1) \\ \overrightarrow{IA}.\vec{a} = 0 & (2) \end{cases}$

$\overrightarrow{IA} = (1-a; 7-b)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + (7+b)^2 = 25 \\ 4(1-a) + 3(-7-b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + (7+b)^2 = 25 & (1) \\ 4a + 3b = -17 & (2) \end{cases}$$

Thế $b = \dfrac{-17-4a}{3}$ từ (2) vào (1):

$$(1-a)^2 + \left(7 + \frac{-17-4a}{3}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow 25a^2 - 50a - 200 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2 \Rightarrow b = -3 \\ a = 4 \Rightarrow b = -11 \end{array}\right.$$

Có hai đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán:

(C_1): $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 25$; (C_2): $(x-4)^2 + (y+11)^2 = 25$

Bài 109. Cho đường thẳng d_m: $(1 - m)^2x + 2my + m^2 - 4m + 1 = 0$. Tìm phương trình đường tròn (C) luôn tiếp xúc với d_m.

Giải

Phương trình (C) có dạng: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$$d(I, d_m) = \frac{\left|(1 - m^2)a + 2mb + m^2 - 4m + 1\right|}{\sqrt{(1 - m^2) + 4m^2}}$$

$$= \frac{\left|(1 - a)m^2 + 2(b - 2).m + a + 1\right|}{m^2 + 1} \qquad (*)$$

Giả sử $d(I, d_m) = k$

$$(*) \Leftrightarrow \left|(1 - a)m^2 + 2(b - 2)m + a + 1\right| = k(m^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (1 - a)m^2 + 2(b - 2)m + a + 1 = km^2 + k & (1) \\ (1 - a)m^2 + 2(b - 2)m + a + 1 = -km^2 - k & (2) \end{array}\right.$$

$$\text{(1), (2) thỏa mãn } \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a = k \\ 2(b - 2) = 9 \\ a + 1 - k \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} 1 - a = -k \\ 2(b - 2) = 0 \\ a + 1 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ k = \pm 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow d_m$ luôn tiếp xúc (C): $x^2 + (y - 2)^2 = 1$

Bài 110. Lập phương trình của đường tròn đi qua điểm A(1; –2) và các giao điểm của đường thẳng $x - 7y + 10 = 0$ và đường tròn $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 10 = 0$

Giải

Trước hết tìm 2 giao điểm của đường thẳng $x - 7 + 10 = 0$ và đường tròn $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ bằng việc giải hệ:

$$\begin{cases} x - 7y + 10 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

Thế $x = 7y - 10$ từ (1) vào (2):

$(7y - 10)^2 + y^2 - 2(7y - 10) + 4y - 20 = 0$

$$\Leftrightarrow 50y^2 - 150y + 100 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = -3 \\ y = 2 \Rightarrow x = 4 \end{array}\right.$$

Hai giao điểm cần tìm: B(–3; 1), C(4; 2).

Phương trình đường tròn cần tìm có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + C = 0$

Qua A $\Leftrightarrow 1 + 4 - 2a + 4b + C = 0 \Leftrightarrow 2a - 4b - C = 5$ (1)

Qua B $\Leftrightarrow 9 + 1 + 6a - 2b + C = 0 \Leftrightarrow 6a - 2b + C = -10$ (2)

Qua C $\Leftrightarrow 16 + 4 - 8a - 4b + C = 0 \Leftrightarrow 8a + 4b - C = 20$ (3)

Giải hệ (1), (2), (3) được $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{3}{2}b$; $c = -10$

Phương trình đường tròn cần tìm: $x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$

Bài 111. Tìm tâm và bán kính của các đường tròn sau:

a. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

b. $x^2 + y^2 = 4x - 6y - 12 = 0$.

c. $4x^2 + 4y^2 + 16x - 12y + 7 = 0$.

Gợi ý

a. Đưa về: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

b. Đưa về: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

c. Đưa về: $x^2 + y^2 + 4x - 3y + \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{9}{2}$.

Bài 112. Gọi (C_m) là đường tròn có phương trình:

$$x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my + 19m - 6 = 0$$

a. Xác định m để (C_m) là đường tròn có bán kính bằng 10.

b. Tìm m để (C_m) là đường tròn.

c. Tìm tập hợp tâm của (C_m).

Giải

a. Thu gọn phương trình (C_m): $(x - m - 2)^2 + (y + 2m)^2 = 5(m^2 - 3m + 2)$

Để (C_m) là đường tròn có bán kính bằng 10:

$5(m^2 - 3m + 2) = 100$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 20 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -3 \end{array}\right.$$

b. Để (C_m) là đường tròn thì $m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m < 1$, hoặc $m > 2$

c. Gọi I(x; y) là tâm của (C_m) thì: $I\begin{cases} x = m + 2 & (1) \\ y = -2m & (2) \end{cases}$

Thế $m = 2 - x$ từ (1) và (2): $y = -2(2 - x)$

$\Leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$ là tập hợp điểm I, với $2 - x < 1$ hoặc $2 - x > 2 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 3$

Bài 113. Gọi (C_m) là đường tròn có phương trình:

$$x^2 + y^2 + (m + 2)x - (m + 4)y + m = 1 = 0$$

a. Xác định m để (C_m) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

b. Tìm tập hợp tâm của các đường tròn (C_m).

c. Chứng minh rằng (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

d. Tìm tất cả các điểm mà (C_m) không thể đi qua.

Giải

a. $x^2 + y^2 + (m + 2)x - (m + 4)y + m = 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 2\frac{(m+2)}{2}x + \frac{(m+2)^2}{4}\right) + \left(y^2 - 2.\frac{(m+4)}{2}y + \frac{(m+4)^2}{4}\right)$$

$$= -m - 1 + \frac{(m+2)^2}{4} + \frac{(m+4)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{m+2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{m+4}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 8)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(m+2)^2 + 4\right] \geq 2$$

Khi $m = -2$ thì (C_m) có bán kính nhỏ nhất.

b. Gọi I (x; y) là tâm của (C_m): $\begin{cases} x = -\dfrac{m+2}{2} & (1) \\ y = \dfrac{m+4}{2} & (2) \end{cases}$

Khử m: Cộng từng vế (1) và (2) được $x + y - 1 = 0$ là phương trình biểu diễn tập hợp tâm I của (C_m).

c. $x^2 + y^2 + (m + 2)x - (m + 4)y + m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1) + m(x - y + 1) = 0 \qquad (*)$$

(*) thỏa mãn $\forall m$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x - y + 1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Thế $y = x + 1$ từ (1) vào (2):

$$x^2 + (x + 1)^2 + 2x - 4(x + 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow (C_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định A(−1; 0) và B(1; 2).

d. Những điểm mà (C_m) không thể đi qua thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}, y \neq 0, y \neq 2$$

Bài 114. Gọi (C_m) là đường tròn có phương trình: $F(x;y) = x^2 + y^2 - 2m(x - a) = 0$ (a là số dương cho trước).

a. Tìm các giá trị của m để (C_m) là đường tròn.

b. Cho điểm A(2a; 0). Chứng minh đường thẳng OA luôn cắt (C_m) (O là gốc tọa độ).

c. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng Δ cố định sao cho hiệu số của bình phương khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc Δ đến tâm của (C_m) và bình phương bán kính của (C_m) là không phụ thuộc vào m.

Giải

a. $x^2 + y^2 - 2m(x - a) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2mx + m)^2 + y^2 = m^2 - 2am$

$\Leftrightarrow (x - m)^2 + y^2 = m^2 - 2am$

Để (C_m) là đường tròn thì $m^2 - 2am \geq 0 \Leftrightarrow m < 0$ hay $m > 2a$.

b. (C_m) có tâm $I(m; 0)$ thuộc trục Ox, đường thẳng OA trùng với Ox nên đi qua tâm I $\Leftrightarrow$ OA luôn cắt C_m.

c. Gọi (C_m): $x^2 + y^2 - 2m(x - a) = 0$ (1)

$(C_{m'})$: $x^2 + y^2 - 2m'(x - a) = 0$ (2) $(m' \neq m)$

Từ từng vế (1) và (2) được $2(m' - m)(x - a) = 0 \Leftrightarrow x - a = 0$ (Δ)

Gọi $P(a; p) \in (\Delta)$

$PI^2 = (m - a)^2 + p$

$R^2 = m^2 - 2am$

$\Rightarrow PI^2 - R^2 = m^2 - 2am + a^2 + p^2 - m^2 + 2am = a^2 + p^2$ không phụ thuộc vào m.

Đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x = a$.

Bài 115. Gọi (C_m) là đường có phương trình:

$$x^2 + y^2 - 2mx + 2(m + 2)y + 2m^2 + 4m - \frac{1}{2} = 0$$

a. Chứng minh rằng (C_m) luôn luôn là một đường tròn có bán kính không đổi.

b. Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m), suy ra rằng (C_m) luôn luôn tiếp xúc với hai đường thẳng mà ta sẽ định rõ phương trình.

Giải

a. $x^2 + y^2 - 2mx + 2(m + 2)y + 2m^2 + 4m - \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2mx + m^2) + \left(y^2 + 2(m + 2) + (m + 2)^2\right)$

$= -2m^2 - 4m + \frac{1}{2} + m^2 + (m + 2)^2 \Leftrightarrow (x - m)^2 + (y + (m + 2))^2 = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow C_m$ có tâm $I(m; m + 2)$, $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

b. I có tọa độ tâm $\begin{cases} x = m \\ y = m + 2 \end{cases}$ khử m: $x - y - 2 = 0$ là phương trình tập hợp tâm I.

(C_m) có bán kính không đổi, có tập hợp tâm là đường thẳng: $x - y - 2 = 0$ (d)

$\Rightarrow (C_m)$ luôn tiếp xúc với hai đường thẳng song song với d sao cho khoảng cách từ tâm I của (C_m) tới mỗi đường thẳng với tâm bằng bán kính $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$ của (C_m)

$$\frac{|m - m - 2 + C|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |C - 2| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C - 2 = 3 \\ C - 2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 5 \\ C = -1 \end{array}\right.$$

Hai đường thẳng cần tìm: d_1: $x - y + 5 = 0$, d_2: $x - y - 1 = 0$.

Bài 116. Gọi (C_α) là đường có phương trình:

$$(x^2 + y^2)\sin\alpha = 2(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \cos\alpha) \quad (\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$$

a. Chứng tỏ rằng (C_α) luôn là một đường tròn khi α thay đổi. Định tâm và bán kính của (C_α).

b. Chứng tỏ rằng (C_α) có một tiếp tuyến cố định mà ta sẽ xác định phương trình.

Giải

a. $(x^2 + y^2).\sin\alpha = 2(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \cos\alpha)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x\cot\alpha + 2y - 2\cot\alpha$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x\cot x + \cot^2\alpha) + (y^2 - 2y + 1) = \cot^2\alpha - 2\cot\alpha + 1$

$\Leftrightarrow (x - \cot\alpha)^2 + (y - 1)^2 = (\cot\alpha - 1)^2$

$\Leftrightarrow (C_\alpha)$ luôn là đường tròn khi α thay đổi; (C_α) có tâm $I(\cot\alpha;\ 1)$ bán kính $R = |\cot\alpha - 1|$.

b. Gọi (C_α): $x^2 + y^2 - 2x\cot\alpha - 2y + 2\cot\alpha = 0$ (1)

$(C_{\alpha'})$: $x^2 + y^2 - 2x.\cot\alpha' - 2y + 2\cot\alpha' = 0$ (2)

Từ từng vế được: $2(\cot\alpha' - \cot\alpha).x - 2(\cot\alpha' - \cot\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$

Gọi Δ là đường thẳng $x - 1 = 0$

$d(I;\ \Delta) = |\cot\alpha - 1| = R\left(= |\cot\alpha - 1|\right)\ \forall\alpha \neq k\pi$

$\Leftrightarrow (C_\alpha)$ luôn luôn đi tiếp xúc với đường thẳng $x - 1 = 0$

Bài 117. Tùy theo m, biện luận sự tương giao của đường thẳng d và đường tròn (C): d: $mx - y - 2m + 3 = 0$, (C): $x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = 0$.

Giải

$x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + y^2 = -\frac{4}{5} + 1$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{5}$

(C) có tâm $I(1;\ 0)$, bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Khoảng cách từ I đến d: $\frac{|m - 2m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|m - 3|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

- Nếu $\dfrac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}} > \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5(m-3)^2 > m^2+1$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 30m + 44 > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 3m + 44 > 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 15m + 22 > 0$

$\Leftrightarrow m < 2$ hay $m = \dfrac{11}{2}$: (C) không cắt d

- Nếu $\dfrac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}} > \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5(m-3)^2 > m^2+1$

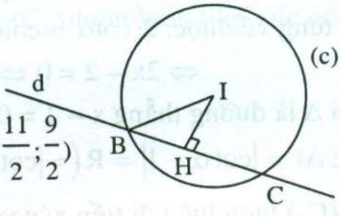
$\Leftrightarrow m = 2$ hay $m = \dfrac{11}{2}$: (C) tiếp xúc d

- Nếu $\dfrac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 2m^2 - 15m + 22 < 0$

$\Leftrightarrow 2 < m < \dfrac{11}{2}$: (C) cắt d.

Bài 118. Cho (C) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ và điểm $A\left(\dfrac{11}{2}; \dfrac{9}{2}\right)$. Tìm phương trình của đường thẳng qua A và cắt (C) theo một dây cung dài $\sqrt{10}$.

Giải



$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$

(C) có tâm I(3; 2), bán kính $R = \sqrt{5}$

Gọi d là đường thẳng

$y = k\left(x - \dfrac{11}{2}\right) + \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow kx - y - \dfrac{11k}{2} + \dfrac{9}{2} = 0$

Trên hình vẽ tượng trưng bên, từ I kẽ IH ⊥ BC thì $IB = \sqrt{5}$; $BH = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\Rightarrow IH = \sqrt{BI^2 - BH^2} = \sqrt{5 - \dfrac{10}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Để d cắt (C) theo dây cung $BC = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow d(I;d) = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\left|3k - 2 - \dfrac{11k}{2} + \dfrac{9}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}\,\dfrac{5|k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\Leftrightarrow 5|k-1| = \sqrt{10}\sqrt{k^2+1}$

$\Leftrightarrow 5(k^2 - 2k + 1) = 10k^2 + 10 \Leftrightarrow 5k^2 + 10k + 5 = 0 \Leftrightarrow k = -1$

Có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

d: $x + y - 10 = 0$.

Bài 119. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 - m^2 = 0$ và điểm I(5; 2)

a. Chứng tỏ rằng I nằm bên trong đường tròn (C).

b. Tìm phương trình đường thẳng cắt (C) tại hai điểm nhận I làm trung điểm.

Giải

a. $x^2 + y^2 - 3x - 6y + 21 - m^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = m^2 + 4$

(C) có tâm K(4; 3), bán kính $R = \sqrt{m^2 + 4}$

$IK = \sqrt{(4 - 5)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{2} < \sqrt{m^2 + 4} \quad \forall m$

$\Leftrightarrow$ I nằm bên trong (C).

b. $\overrightarrow{IK} = (-1,1)$ cùng phương với $\vec{n} = (1;-1)$

Đường thẳng qua I và vuông góc với IK sẽ cắt (C) tại hai điểm nhận I làm trung điểm.

Phương trình đường thẳng này có dạng $x - y + C = 0$ qua I $\Leftrightarrow C = -3$

Đường thẳng cần tìm: $x - y - 3 = 0$

Bài 120. Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của hai đường tròn sau:

a. (C_1): $x^2 + y^2 - 7x - y = 0$; (C_2): $x^2 + y^2 - x - 7y - 18 = 0$

b. (C_1): $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$; (C_2): $x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$

c. (C_1): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$; (C_2): $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$.

Giải

a. (C_1): $x^2 + y^2 - 7x - y = 0$ (1)

(C_2): $x^2 + y^2 - x - 7y - 18 = 0$ (2)

Trừ từng vế (2) và (1): $6x - 6y - 18 = 0 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$

Thế $y = x - 3$ vào (1):

$$x^2 + (x - 3)^2 - 7x - x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 12 = 0 = \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = 6 \Rightarrow y = 3 \end{array}\right.$$

- (C_1) cắt (C_2) tại A(1; –2), B(6; 3)

b. (C_1) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$ (1)

(C_2): $x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$ (2)

Trừ từng vế (1) và (2): $3x + y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = 9 - 3x$ thế vào (2)

$x^2 + (9 - 3x)^2 - x - 5(9 - 3x) + 4 = 0 \Leftrightarrow 10x^2 - 40x + 40 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$: (C_1) tiếp xúc (C_2) tại M (2; 3).

c. (C_1): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ (1)

(C_2): $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$ (2)

Trừ từng vế (1) và (2): $2x + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1-2x}{2}$ thế vào (1)

$$x^2 + \left(\frac{1-2x}{2}\right)^2 - 2x - 4\left(\frac{1-2x}{2}\right) + 4 + 16 = 0$$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x^2 - 4x - 8x - 8 + 16x + 16 = 0$

$\Leftrightarrow 8x^2 + 4x + 9 = 0$ vô nghiệm: (C_1) không cắt (C_2)

Bài 121. Cho hai đường tròn:

(C_1): $x^2 + y^2 - x - 6y + 8 = 0$, (C_2): $x^2 + y^2 - 2mx - 1 = 0$.

Định m để (C_1) tiếp xúc (C_2). Chỉ rõ loại tiếp xúc

Giải

(C_1): $x^2 + y^2 - x - 6y + 8 = 0$ (1)

(C_2): $x^2 + y^2 - 2mx - 1 = 0$ (2)

Trừ từng vế (1) và (2): $(2m-1)x - 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{(2m-1)x + 9}{6}$

Thế vào (2): $x^2 + \left(\dfrac{(2m-1)x+9}{6}\right)^2 - 2mx - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 36x^2 + (2m-1)^2.x^2 + 18(2m-1)x + 81 - 72mx - 36 = 0$

$\Leftrightarrow (4m^2 - 4m + 37)x^2 - 18(2m+1)x + 45 = 0$

$\Delta' = 81(2m+1)^2 - 45(4m^2 - 4m + 37)$

$= 144m^2 + 504m - 1584 = 72(2m^2 + 7m - 22)$

Để (C_1) tiếp xúc (C_2) $\Leftrightarrow 2m^2 + 7m - 22 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{11}{2} \\ m = 2 \end{array}\right.$

- Khi $m = -\dfrac{11}{2}$:

(C_1): $x^2 + y^2 - x - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \dfrac{5}{4}$

(C_1) có tâm $I_1\left(\dfrac{1}{2};3\right)$, bán kính $R_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(C_2): $x^2 + y^2 + 11x = 1 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{11}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{125}{4}$

(C_2): có tâm $I_2\left(-\dfrac{11}{2};0\right)$, bán kính $R_2 = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} I_1I_2 = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5} \\ R_2 + R_1 = 3\sqrt{5} \end{array}\right\} (C_1) \text{ và } (C_2) \text{ tiếp xúc ngoài nhau}$$

- Khi m = 2:

(C_2): $x^2 + y^2 - 4x = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 5$

(C_2) có tâm $I_2(2; 0)$, bán kính $R_2 = \sqrt{5}$

$I_1I_2 = \sqrt{\dfrac{9}{4} + 9} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$; $R_2 + R_1 = \sqrt{5} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$: (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài nhau.

Bài 122. Cho hai đường tròn:

(C): $x^2 + y^2 + 3ax = 0$

(C_m): $(1+m)^2(x^2+y^2) - 2ax - 2amy - 3a^2 = 0$ (a là bằng số khác 0, m là tham số)

Chứng minh rằng (C_m) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt và tiếp tuyến với (C) và (C_m) tại mỗi điểm chung này vuông góc với nhau

Giải

(C): $x^2 + y^2 + 3ax = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{3a}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{9a^2}{4}$

(C): có tâm $I_1\left(-\dfrac{3a}{2};0\right)$, bán kính $R_1 = \dfrac{|3a|}{2}$

(C_m): $(1+m^2)(x^2+y^2) - 2ax - 2amy - 3a^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2ax}{1+m^2} - \frac{2amy}{1+m^2} = \frac{3a^2}{1+m^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{1+m^2}\right)^2 + \left(y - \frac{am}{1+m^2}\right)^2 = \frac{3a^2}{1+m^2} + \frac{a^2}{(1+m^2)} + \frac{a^2m^2}{(1+m^2)} = \frac{4a^2}{1+m^2}.$$

$\Rightarrow (C_m)$ có tâm $I_2\left(\dfrac{a}{1+m^2};\dfrac{am}{1+m^2}\right)$, bán kính $R_2 = \dfrac{2|a|}{\sqrt{1+m^2}}$

$$R_1^2 + R_2^2 = \frac{9a^2}{4} + \frac{4a^2}{1+m^2} = \frac{25a^2 + 9a^2m^2}{4(1+m^2)}$$

$$I_1I_2^2 = \left(\frac{a}{1+m^2} + \frac{3a}{2}\right)^2 + \frac{a^2m^2}{(1+m^2)^2} = \left(\frac{5a + 3am^2}{2(1+m^2)}\right)^2 + \frac{a^2m^2}{(1+m^2)^2}$$

$$= \frac{25a^2 + 30a^2m^2 + 9a^2m^4 + 4a^2m^2}{4(1+m^2)} = \frac{25a^2 + 9a^2m^2 + 25a^2m^2 + 9a^2m^4}{4(1+m^2)^2}$$

$$= \frac{(25a^2 + 9a^2m^2) + m^2(25a^2 + 9a^2m^2)}{4(1+m^2)^2}$$

$$= \frac{(25a^2 + 9a^2m^2)(1+m^2)}{4(1+m^2)} = \frac{25a^2 + 9a^2m^2}{4(1+m^2)} = R_1^2 + R_2^2 \qquad (*)$$

(*) Chứng tỏ hai điều:

1. (C) và (C_m) cắt nhau tại hai điểm A, B
2. Tam giác I_1AI_2 (hoặc I_1BI_2) là tam giác vuông tại A (hoặc B)

⇔ Tiếp tuyến của (C) và (C_m) tại A (hoặc B) là vuông góc với nhau.

Bài 123. Có bao nhiêu tiếp tuyến chung với hai đường tròn (C_1) và (C_2) trong các trường hợp sau:

a. $(C_1): x^2 + y^2 - 7x - y = 0$; $(C_2): x^2 + y^2 - x - 7y - 18 = 0$

b. $(C_1): x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$; $(C_2): x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$

c. $(C_1): x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$; $(C_2): x^2 + y^2 - 16x - 4 = 0$

Giải

a. $(C_1): x^2 + y^2 - 7x - y = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2.\frac{7}{2}x + \frac{49}{4}\right) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = \frac{49}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

(C_1) có tâm $I_1\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R_1 = \frac{5}{\sqrt{2}}$

$(C_2): x^2 + y^2 - x - 7y - 18 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - 7y + \frac{49}{4}\right) = 18 + \frac{1}{4} + \frac{49}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{61}{2}$$

$\Rightarrow (C_2)$ có tâm $I_2\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$, bán kính $R_2 = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{2}}$

$$I_1I_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$R_1 + R_2 = \dfrac{5 + \sqrt{61}}{\sqrt{2}}$

$R_1 + R_2 > I_1I_2$: (C_1) cắt (C_2): có hai tiếp tuyến chung.

b. (C_1): $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 4$

(C_1) có tâm $I_1(0; 1)$, bán kính $R_1 = 2$

(C_2): $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 8y + 16)$

$= -28 + 16 + 16 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$

(C_2) có tâm $I_2(4; 4)$, bán kính $R_2 = 2$

$I_1I_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$R_1 + R_2 = 4$

(C_1) và (C_2) ở ngoài nhau: có 4 tiếp tuyến chung

c. (C_2): $x^2 + y^2 - 16x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 16x + 64) + y^2 = 4 + 64 \Leftrightarrow (x - 8)^2 + y^2 = 68$

(C_2) có tâm $I_2(8; 0)$, bán kính $R_2 = \sqrt{68}$

(C_1): $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = -8 + 4 + 9 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$

(C_1) có tâm $I_1(2; 3)$, bán kính $R_1 = \sqrt{5}$

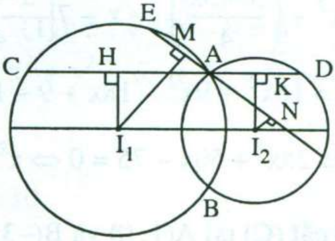
$I_1I_2 = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5}$

$R_1 + R_2 = \sqrt{68} + \sqrt{5} > I_1I_2$

$\Rightarrow$ (C_1) và (C_2) ở ngoài nhau: có 4 tiếp tuyến chung

Bài 124. Cho hai đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 - 16x - 4 = 0$; (C_2): $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng qua điểm chung của (C_1), (C_2) và cắt (C_1), (C_2) theo hai dây cung có tổng chiều dài lớn nhất.

Giải



Xem hình vẽ bên:

CD là đường thẳng qua A và song song với I_1I_2.

Dễ thấy $CA + AD = CD = 2I_1I_2$

$EA + AF = EF = 2MN$

Với mọi vị trí của EF (qua A) thì $MN \le I_1I_2$

$\Rightarrow$ CD là vị trí của đường thẳng qua A và cắt (C_1), (C_2) theo hai dây cung có tổng chiều dài lớn nhất.

(C_1) $x^2 + y^2 - 16x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 8)^2 + y^2 = 68$

(C_2): $x^2 = y^2 - 4x - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$

(C_1) có tâm $I_1(8;\, 0)$, (C_2) có tâm $I_2(2;\, 3)$

$\overrightarrow{I_1I_2} = (6;\, -3)$ cùng phương với $\vec{n} = (2;\, -1)$ vuông góc với $\vec{a} = (1;\, 2)$

Trừ từng vế; $12x - 6y + 12 = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 2$

Thế vào (C_1): $x^2 + (2x + 2)^2 - 16x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = \dfrac{8}{5} \Rightarrow y = \dfrac{26}{5} \end{array}\right.$$

Gọi $A(0;\, 2)$, $B\left(\dfrac{8}{5}; \dfrac{26}{5}\right)$

Có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán:

d_1: qua A, có vectơ pháp tuyến $\vec{a} = (1;2)$ nên có dạng

$x + 2y + C = 0$; qua A $\Leftrightarrow C = -4$

d_1: $x + 2y - 4 = 0$

d_2: qua B, có vectơ pháp tuyến $\vec{a} = (1;2)$ nên có dạng:

$x + 2y + C = 0$; qua B $\Leftrightarrow C = -12$

d_2: $x + 2y - 12 = 0$

Bài 125. Cho đường thẳng d: $3x + 4y - 3 = 0$ và đường tròn (C):

$$x^2 + y^2 - x - 7y = 0$$

a. Tìm tọa độ giao điểm của d và (C).

b. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại các giao điểm đó.

Giải

a. $3x + 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{3 - 3x}{4}$. Thế vào phương trình (C):

$$x^2 + \left(\frac{3 - 3x}{4}\right)^2 - x - 7\left(\frac{3 - 3x}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 9x^2 - 18x + 9 - 16x - 84 + 84x = 0$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 50x - 75 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = -3 \Rightarrow y = 3 \end{array}\right.$$

d cắt (C) tại $A(1;\, 0)$ và $B(-3;\, 3)$

b. (C): $x^2 + y^2 - 7y = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - x + \dfrac{1}{4}\right) + \left(y^2 - 7x + \dfrac{49}{4}\right) = \dfrac{59}{4} = \dfrac{25}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

(C) có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{5}{\sqrt{2}}$

Dùng công thức tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ thuộc đường tròn tâm $I(a; b)$:

$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$

- Tại $A(1; 0)$ có tiếp tuyến (T_1): $\left(1 - \frac{1}{2}\right)(x - 1) + \left(0 - \frac{7}{2}\right)(y - 0) = 0$

  $\Leftrightarrow x - 7y - 1 = 0$

- Tại $B(-3; 3)$ có tiếp tuyến (T_2): $\left(-3 - \frac{1}{2}\right)(x + 3) + \left(3 - \frac{7}{2}\right)(y - 3) = 0$

  $\Leftrightarrow -\frac{7}{2}x - \frac{21}{2} - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow 7x + y + 18 = 0$

Bài 126. Lập phương trình tiếp tuyến với (C): $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$ cùng phương với đường thẳng: $5x + 12y - 6 = 0$.

Giải

(C): $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) = 16 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 16$

(C) có tâm $I(1; -4)$, bán kính $R = 4$

Gọi d là đường thẳng $5x + 12y + C = 0$

d sẽ là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I; d) = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{|5.1 + 12(-4) + C|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 4 \Leftrightarrow |C - 43| = 4.13 = 52$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C - 43 = 52 \\ C - 43 = -52 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 95 \\ C = -9 \end{array}\right.$$

Có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán: (T_1): $5x + 12y + 95 = 0$

(T_2): $5x + 12y - 9 = 0$

Bài 127. Lập phương trình tiếp tuyến với (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ vuông góc với đường thẳng $3x - y + 6 = 0$ (Δ).

Giải

$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$

(C) có tâm $I(3; -1)$, bán kính $R = \sqrt{10}$

Gọi d là đường thẳng vuông góc với (Δ). Phương trình d có dạng:

$x + 3y + C = 0$

Để d là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I; d) = \sqrt{10}$

$$\Leftrightarrow \frac{|3+3.(-1)+C|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 10 \\ C = -10 \end{array}\right.$$

Có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán:

d_1: $x + 3y + 10 = 0$

d_2: $x + 3y - 10 = 0$

Bài 128. Lập phương trình các tiếp tuyến với (C), xuất phát từ A, với:

a. (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$; A(3; 4)

b. (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$; A(1; 3)

Giải

a. $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

(C) có tâm I(2; 1), bán kính $R = \sqrt{5}$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 - 2y_0 = 0$ (1)

Tiếp tuyến với (C) tại M có dạng:

$(x_0 - 2)(x - x_0) + (y_0 - 1)(y - y_0) = 0$ (T)

(T) qua A(3; 4) $\Leftrightarrow (x_0 - 2)(3 - x_0) + (y_0 - 1)(4 - y_0) = 0$

$\Leftrightarrow -x_0^2 + 5x_0 - 6 - y_0^2 + 5y_0 - 4 = 0$ (2)

Cộng từng vế (1) và (2): $x_0 + 3y_0 = 10 \Leftrightarrow x_0 = 10 - 3y_0$. Thay vào (1)

$(10 - 3y_0)^2 + y_0^2 - 4(10 - 3y_0) - 2y_0 = 0$

$\Leftrightarrow 10y_0^2 - 50y_0 + 60 = 0 \Leftrightarrow y_0^2 - 5y_0 + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 3 \Rightarrow x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \Rightarrow x_0 = 4 \end{array}\right.$$

- Tại B(1; 3) có tiếp tuyến:

  $(1 - 2)(x - 1) + (3 - 1)(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 5 = 0$ (T_1)

- Tại C(4; 2) có tiếp tuyến:

  $(4 - 2)(x - 4) + (2 - 1)(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 10 = 0$ (T_2)

b. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$

(C) có tâm I(3; –1), bán kính R = 2

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 6x_0 + 2y_0 + 6 = 0$

Tiếp tuyến với (C) tại M có dạng:

$(x_0 - 3)(x - x_0) + (y_0 + 1)(y - y_0) = 0$ (T)

(T) qua A(1; 3) $\Leftrightarrow (x_0 - 3)(1 - x_0) + (y_0 + 1)(3 - y_0) = 0$

$\Leftrightarrow -x_0^2 + 4x_0 - 3 - y_0^2 + 2y_0 + 3 = 0$ (2)

Cộng từng vế (1) và (2): $-2x_0 + 4y_0 + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x_0 - 2y_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2y_0 + 3$. Thế vào (1)

$(2y_0 + 3)^2 + y_0^2 - 6(2y_0 + 3) + 2y_0 + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 5y_0^2 + 2y_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = -1 \Rightarrow x_0 = 1 \\ y_0 = \dfrac{3}{5} \Rightarrow x_0 = \dfrac{21}{5} \end{array}\right.$$

- Tại B(1; –1) có tiếp tuyến: $(1 - 3)(x - 1) + (-1 + 1)(y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \qquad (T_1)$

- Tại $C\left(\dfrac{21}{5}; \dfrac{3}{5}\right)$ có tiếp tuyến: $\left(\dfrac{21}{5} - 3\right)\left(x - \dfrac{21}{5}\right) + \left(\dfrac{3}{5} + 1\right)\left(y - \dfrac{3}{5}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 4y - 15 = 0$

Bài 129. Tìm tiếp tuyến chung của hai đường tròn:

a. (C_1): $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$; (C_2): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

b. (C_1): $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$; (C_2): $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

Giải

a. (C_1): $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$

(C_1) có tâm $I_1(2;4)$, bán kính $R_1 = 3$

(C_2): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

(C_2) có tâm $I_2(1; 1)$, bán kính $R_2 = 2$

$I_1I_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} < R_1R_2 = 5$: (C_1)và (C_2) cắt nhau nên có hai tiếp tuyến chung ngoài, xuất phát (qua) từ điểm A là tâm vị tự ngoài của (C_1) và (C_2).

Gọi A(x; y)

$$\frac{\overrightarrow{I_1A}}{\overrightarrow{I_2A}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\big((x - 2);(y - 4)\big) = 3\big((x - 1);(y - 1)\big)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 3x - 3 \\ 2y - 8 = 3y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases} \quad A(-1; -5)$$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C_2)$: $x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 2y_0 - 2 = 0$ (1)

Tiếp tuyến của (C_2) tại M có dạng:

$(x_0 - 1)(x - x_0) + (y_0 - 1)(y - y_0) = 0 \qquad (T)$

(T) qua $A(-1; -5) \Leftrightarrow (x_0 - 1)(-1 - x_0) + (y_0 - 1)(-5 - y_0) = 0$

$\Leftrightarrow -x_0^2 + 1 - y_0^2 - 4y_0 + 5 = 0 \qquad (2)$

Cộng từng vế (1) và (2): $-2x_0 - 6y_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 - 3y_0$. Thế vào (1):

$(2 - y_0)^2 + y_0^2 - 2(2 - 3y_0) - 2y_0 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 10y_0^2 - 8y_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 1 \Rightarrow x_0 = -1 \\ y_0 = -\dfrac{1}{5} \Rightarrow x_0 = \dfrac{13}{5} \end{array}\right.$$

Có hai tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2):

(T_1): $(-1-1)(x+1) + (1-1)(y-1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$

(T_2): $\left(\dfrac{13}{5} - 1\right)\left(x - \dfrac{13}{5}\right) + \left(-\dfrac{1}{5} - 1\right)\left(y + \dfrac{1}{5}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{5}\left(x - \frac{13}{5}\right) - \frac{6}{5}\left(y + \frac{1}{5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x - \frac{13}{5}\right) - 3\left(y + \frac{1}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y - 11 = 0$$

b. (C_1): $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

(C_1) có tâm $I_1(1; -1)$, bán kính $R_1 = 2$

(C_2): $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$

(C_2) có tâm $I_2(3; 1)$, bán kính $R_2 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} I_1I_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\ R_1 + R_2 = 3 \end{array}\right\} I_1I_2 < R_1R_2 \ (C_1) \text{ cắt } (C_2)$$

Có hai tiếp tuyến chung ngoài xuất phát từ A(x; y) là tâm vị tự (ngoài) của (C_1) và (C_2).

$$\frac{\overrightarrow{I_1A}}{\overrightarrow{I_2A}} = \frac{R_1}{R_2} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{I_1A} = 2\overrightarrow{I_2A}$$

$$\Leftrightarrow (x-1; y+1) = 2(x-3; y-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2x - 6 \\ y + 1 = 2y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \ A(5; 3)$$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C_1)$: $x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 + 2y_0 - 2 = 0$ (1)

Tiếp tuyến của (C_1) tại M có dạng:

$(x_0 - 1)(x - x_0) + (y_0 + 1)(y - y_0) = 0$ (T)

(T) qua A(5; 3) $\Leftrightarrow (x_0 - 1)(5 - x_0) + (y_0 + 1)(3 - y_0) = 0$

$\Leftrightarrow -x_0^2 + 6x_0 - 5 - y_0^2 + 2y_0 + 3 = 0$ (2)

Cộng từng vế (1) và (2): $4x_0 + 4y_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 + y_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow y_0 = 1 - x_0$

$$\Leftrightarrow 2x_0^2 - 6x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{3 - \sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow y_0 = \dfrac{-1 + \sqrt{7}}{2} \\ x_0 = \dfrac{3 + \sqrt{7}}{2} \Rightarrow y_0 = \dfrac{-1 - \sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$$

- Tại B $\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}\right)$ có tiếp tuyến (T_1):

$$\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}-1\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}+1\right)\left(y-\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right)=0$$

$$\frac{1-\sqrt{7}}{2}\left(x-\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)+\frac{1+\sqrt{7}}{2}\left(y-\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{7}\right)x+\left(1+\sqrt{7}\right)y-\left(8-2\sqrt{7}\right)=0$$

- Tại C $\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}\right)$ có tiếp tuyến (T_2):

$$\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}-1\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}+1\right)\left(y+\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{7}\right)x+\left(1-\sqrt{7}\right)y-\left(9+3\sqrt{7}\right)=0$$

♦ Lời bình: Phương pháp chung để tìm tiếp tuyến chung của hai đường tròn cho trước trong bài giải của bài tập này là phương pháp đơn giản nhất, có thể tóm tắt làm 3 bước:

Bước 1: Tìm các tâm vị tự của hai đường tròn.

Bước 2: Viết phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm $M(x_0;\ y_0)$ của một trong hai đường tròn.

Bước 3: Cho tiếp tuyến đi qua tâm vị tự, từ đó tìm $x_0;\ y_0$.

Bài 130. Xét các đường tròn: (C): $x^2+y^2-1=0$

(C_m): $x^2+y^2-2(m+1)x+4my-5=0$

a. Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m).

b. Chứng minh rằng có hai đường tròn (C_m) tiếp xúc với (C) ứng với hai giá trị của m. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó.

Giải

a. (C_m): $x^2+y^2-2(m+1)x+4my-5=0$

$\Leftrightarrow \left[x-(m+1)\right]^2+\left[y+2m\right]^2=5+(m+1)^2+2m^2$

$\Leftrightarrow (x-(m+1))^2+(y+2m)^2=3m^2+2m+6$

(C_m) có tâm $I(m+1;\ -2m)$

$I:\begin{cases}x=m+1\\ y=-2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=2m+2\\ y=-2m\end{cases}\Leftrightarrow 2x+y-2=0$ là phương trình của tập hợp tâm I.

b. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1(m+1)x + 4my - 5 = 0 \end{cases}$

Trừ từng vế: $2(m+1)x - 4my + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (m+1)x - 2my + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ y = \dfrac{(m+1)x + 2}{2m} \end{cases}$$

Thế vào (1): $x^2 + \left(\dfrac{(m+1)x + 2}{2m}\right)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2x^2 + (m^2 + 2m + 1)x^2 + 4(m+1)x + 4 - 4m^2 = 0$

$\Leftrightarrow (5m^2 + 2m + 1)x^2 + 4(m+1)x + 4 - 4m^2 = 0$

$\Delta' = 4(m^2 + 2m + 1) + 4(m^2 - 1)(5m^2 + 2m + 1)$

$= 4(m+1)\left[m + 1 + (m+1)(5m^2 + 2m + 1)\right]$

$= 4(m+1)\left[m + 1 + 5m^3 - 5m^2 + 2m^2 - 2m^2 + m + 1\right]$

$= 4(m+1)(5m^3 - 3m^2) = 4m^2(m+1)(5m - 3)$

Để (C_m) tiếp xúc (C) thì $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = -1 \\ m = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$

- Khi $m = -1$: (C_{-1}): $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 9$

  (C_{-1}) có tâm $I_1(0; 2)$, bán kính $R = 3$

  $\left(C_{\frac{3}{5}}\right): x^2 + y^2 - 2\left(\dfrac{3}{5} + 1\right)x + 4.\dfrac{3}{5}y - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \dfrac{16}{5}x + \dfrac{12}{5}y - 5 = 0$

  $\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{8}{5}\right)^2 + \left(y + \dfrac{6}{5}\right)^2 = 5 + \dfrac{64 + 36}{25} = 9$

  $\left(C_{\frac{3}{5}}\right)$ có tâm $I_2\left(\dfrac{8}{5}; \dfrac{-6}{5}\right)$ bán kính $R_2 = 3$

  $I_1I_2 = \sqrt{\left(\dfrac{8}{5} - 0\right)^2 + \left(-\dfrac{6}{5} - 1\right)^2} = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$

  $R_1 + R_2 = 6 > \dfrac{8}{\sqrt{5}} = I_1I_2 : \left(C_{-1}\right)$ và $\left(C_{\frac{3}{5}}\right)$

  Có 2 tiếp tuyến chung ngoài song song với đường nối tâm I_1I_2.

Đường nối tâm I_1I_2: $\dfrac{x}{\dfrac{8}{5}} = \dfrac{y-2}{-\dfrac{16}{5}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{-2} \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0$

Phương trình 2 tiếp tuyến chung ngoài có dạng $2x + y + C = 0$ (d)

Khoảng cách từ I_1 (hoặc I_2) từ đường thẳng (d) bằng 3

$$\Leftrightarrow \frac{|2.0 + 2 + C|}{\sqrt{5}} = 3 \Leftrightarrow |C + 2| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 3\sqrt{5} - 2 \\ C = -3\sqrt{5} - 2 \end{array}\right.$$

Hai tiếp tuyến chung ngoài: (T_1): $2x + y + 3\sqrt{5} - 1 = 0$

(T_2): $2x + y - 3\sqrt{5} - 2 = 0$

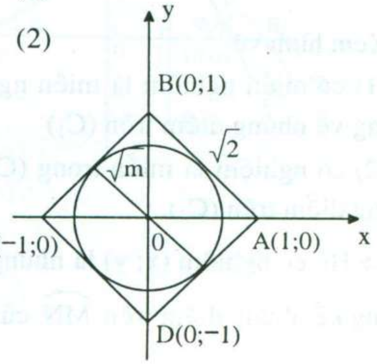
Bài 131. Xác định m sao cho hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 < m & (2) \end{cases}$$

Giải

(1) biểu diễn một hình vuông ABCD

(2) gồm những điểm nằm bên trong đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = \sqrt{m}$.



Để hệ có nghiệm thì:

$$\sqrt{m} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$$

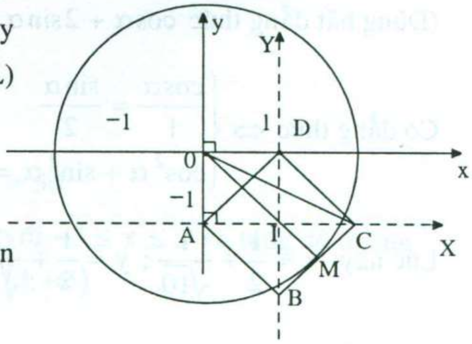
Bài 132. a. Vẽ đường (L) có phương trình: $|x - 1| + |y + 1| = 1$

b. Tìm những giá trị của k để hệ phương trình sau có nhiều nghiệm nhất:

$$\begin{cases} |x - 1| + |y + 1| = 1 \\ x^2 + y^2 = k \end{cases}$$

Giải

a. Thực hiện phép tịnh tiến hệ trục Oxy theo $\overrightarrow{OI} = (1;-1)$. Trong hệ trục IXY, (L) là các điểm trên cạnh hình vuông ABCD.



b. Trên hình vẽ: $OC = \sqrt{5}$; $OM = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$x^2 + y^2 - k = 0$ là đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{k}$ (C).

Khi $\dfrac{3\sqrt{2}}{2} < \sqrt{k} < \sqrt{5}$ thì số giao điểm của (C) và (L) nhiều nhất

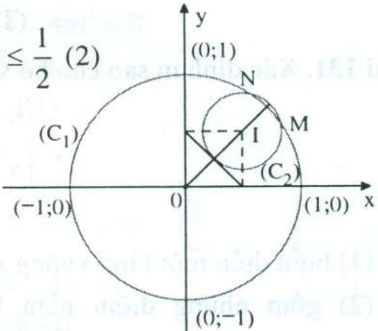
⇔ hệ phương trình có nhiều nghiệm nhất (2 nghiệm).

Bài 133. x, y là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x + y \geq x^2 + y^2 \end{cases}$

Hãy tìm nghiệm có tổng (x + 2y) lớn nhất.

Giải

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x + y \geq x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 > 1 & (1) \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$$



Xem hình vẽ:

(1) có miền nghiệm là miền ngoài (C$_1$), không vẽ những điểm trên (C$_1$)

(2) có nghiệm là miền trong (C$_2$), kẽ cả những điểm trên (C$_2$).

⇒ Hệ có nghiệm (x; y) là những điểm giới hạn bởi $\overset{\frown}{MN} \in (C_1)$ và $\overset{\frown}{MN} \in (C_2)$ không kể những điểm trên $\overset{\frown}{MN}$ của (C$_1$)

Từ (2): Đặt: $\begin{cases} x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha \\ y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha \\ 2y - 1 = \sqrt{2}\sin\alpha \end{cases}$

$$\Rightarrow x + 2y = \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha + 2\sin\alpha) \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{5}$$

(Dùng bất đẳng thức $\cos\alpha + 2\sin\alpha \leq \sqrt{1 + 2^2}.\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{5}$)

Có đẳng thức $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{1} = \dfrac{\sin\alpha}{2} \\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Lúc này: $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{10}}$.

Bài 134. Cho phương trình $\sqrt{4 - x^2} = mx + 2 - m$ (m là tham số)

Biện luận tùy theo m số nghiệm của phương trình trên.

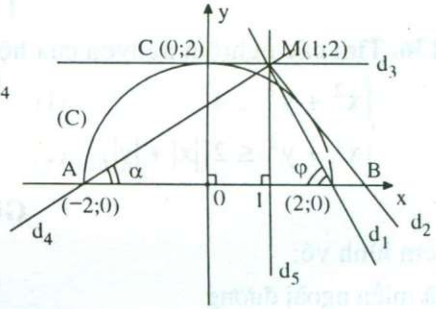
Giải

$y = \sqrt{4 - x^2}$ là nửa đường tròn (C), tâm O(0; 0), bán kính R = 2 nằm phía trên trục Ox.

$y = m(x + 1) + 2$ là đường thẳng d đi qua M(1; 2) và có hệ số góc bằng m.

Vị trí d_3 của d: m = 0: 1 nghiệm (kép)

$\tan\varphi = m_1 = -2$; $\tan\alpha = \dfrac{2}{3} = m$



Khi d biến thiên từ vị trí d_3 đến vị trí d_4

$\Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{2}{3}$ 2 nghiệm.

Từ d_4 đến d_5: $m > \dfrac{2}{3}$: 1 nghiệm.

d_2 là vị trí ứng với $m = -\dfrac{4}{3}$

Từ vị trí d_2 đến d_3: $-\dfrac{4}{3} < m < 0$: vô nghiệm.

Từ vị trí d_1 đến d_2: $-2 < m < -\dfrac{4}{3}$: 2 nghiệm

Bài 135. Cho hàm số: $y = \sqrt{|x^2 - 9| + 8x + 25}$. Vẽ đồ thị hàm số này.

Giải

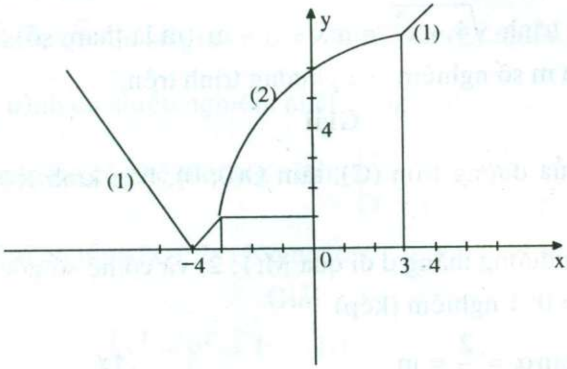
$$y = \sqrt{|x^2 - 9| + 8x + 25} = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 8x + 16} \text{ nếu } x \le -3 \text{ hay } x \ge 3 \\ \sqrt{9 - x^2 + 8x + 25} \text{ nếu } -3 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} |x + 4| \text{ nếu } x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty) \quad (1) \\ \sqrt{50 - (x - 4)^2} \qquad (2) \end{cases}$$

(2): $y = \sqrt{50 - (x - 4)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ (x - 4)^2 + y^2 = 50 \end{cases}$

(2) là nửa đường tròn (C) $(x - 4)^2 + y^2 = 50$ với $-3 \le x \le 3$ và tung độ dương

(1) là đồ thị $y = |x + 4|$ với $x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$



Bài 136. Tìm các nghiệm nguyên của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 4 & (1) \\ x^2 + y^2 \le 2\left(|x| + |y|\right) & (2) \end{cases}$$

Giải

Xem hình vẽ:

(1) là miền ngoài đường tròn (C).

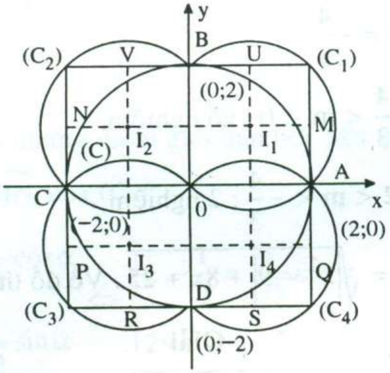
(2) gồm:

– Miền trong của cung lớn $\overset{\frown}{BO}$ của (C_1)

– Miền trong của cung lớn $\overset{\frown}{OB}$ của (C_2)

– Miền trong của cung lớn $\overset{\frown}{OD}$ của (C_3)

– Miền trong của cung lớn $\overset{\frown}{DO}$ của (C_4).



(C_1): đường tròn tâm $I_1(1; 1)$, bán kính $R_1 = \sqrt{2}$

(C_2): đường tròn tâm $I_2(-1; 1)$, bán kính $R_2 = \sqrt{2}$

(C_3): đường tròn tâm $I_3(-1; -1)$, bán kính $R_3 = \sqrt{2}$

(C_4): đường tròn tâm $I_4(1; -1)$, bán kính $R_4 = \sqrt{2}$

Các nghiệm nguyên thấy trên hình vẽ: (2; 0); (0; 2); (–2; 0); (0; –2); (2; 2); (–2; 2); (–2; 2); (2; –2); (2; 1); (–2; 1); (–2; –1); (2; –1).

Bài 137. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{82}{9} & (1) \\ \left|x + \dfrac{1}{y}\right| + \left|\dfrac{10}{3} - x + y\right| = \dfrac{10}{3} + y + \dfrac{1}{y} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $y \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow \left|x + \frac{1}{y}\right| + \left|\frac{10}{3} - x + y\right| = x + \frac{1}{y} + \frac{10}{3} - x + \frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} \geq 0 \\ \dfrac{10}{3} - x + y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{10}{3} + y + \frac{1}{y} \geq 0 \qquad (*)$$

- Nếu $y > 0$: (*) luôn đúng

Do $x^2 + y^2 = \dfrac{82}{9} \Rightarrow 0 < y \leq \dfrac{\sqrt{82}}{3}$

* Trường hợp $x > 0$ thì $x = \sqrt{\dfrac{82}{9} - y^2}$ (1) đúng

$$x = \sqrt{\frac{82}{9} - y^2} < \frac{\sqrt{82}}{3} < \frac{10}{3} + y$$

* Trường hợp $x < 0$ thì $x = -\sqrt{\dfrac{82}{9} - y^2}$

$$-x = \sqrt{\frac{82}{9} - y^2} \leq \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{82}{9} - y^2 \leq \frac{1}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow y^4 - \frac{82}{9}y^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{1}{9} \text{ hay } y^2 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow y \leq \frac{1}{3} \text{ hay } y \geq 3$$

Lúc đó: $\left[\begin{array}{l} 0 < y \leq \dfrac{1}{3}, x = -\sqrt{\dfrac{82}{9} - y^2} \\ 3 \leq y \leq \dfrac{\sqrt{82}}{3}, x = -\sqrt{\dfrac{82}{9} - y^2} \end{array}\right.$

- Nếu $y < 0$ (*) $\Leftrightarrow y^2 + \dfrac{10}{3}y + 1 \leq 0$

Do $\dfrac{10}{3} + y \geq x \geq -\dfrac{1}{y} > 0 \Rightarrow \left(\dfrac{10}{3} + y\right)^2 \geq x^2 = \dfrac{82}{9} - y^2$

$$\Leftrightarrow \frac{100}{9} + \frac{20}{3}y + y^2 \geq \frac{82}{9} - y^2 \Leftrightarrow 2y^2 + \frac{20y}{3} + \frac{18}{9} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + \frac{10}{3}y + 1 \geq 0 \Rightarrow y^2 + \frac{10}{3}y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -3 \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{82}{9} - 9} = \dfrac{1}{3}\ (\text{do } x > 0) \\ y = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{82}{9} - \dfrac{1}{9}} = 3 \end{array}\right.$$

Kết luận: + Nếu $y > 0$ nghiệm của hệ là $\left[\begin{array}{l} 0 < y \leq \dfrac{1}{3}, x = -\sqrt{\dfrac{82}{9} - y^2} \\ 3 \leq y < \dfrac{\sqrt{82}}{3}, x = -\sqrt{\dfrac{82}{9} - y^2} \end{array}\right.$.

+ Nếu $y \leq 0$ thì $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 3 \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Bài 138. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ và điểm $M(x_0; y_0)$ nằm ngoài đường tròn. Từ M kẽ hai tiếp tuyến MT_1 và MT_2 với đường tròn (T_1, T_2 là hai tiếp điểm).

a. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.

b. Giả sử M chạy trên đường thẳng d cố định không cắt đường tròn đã cho. Chứng minh rằng khi đó các đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

a. Gọi $T_1(x_1; y)$; đường tròn (C): $x^2 + y^2 = R^2$ có tâm O(0; 0)

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến MT_1: $(x_1 - 0)(x - x_1) + (y_1 - 0)(y - y_2) = 0$

$\Leftrightarrow x_1x + y_1y - (x_1^2 + y_1^2) = 0 \Leftrightarrow x_1x + y_1y - R^2 = 0$

Tương tự, tiếp tuyến MT_2 tại $T_2(x_2; y_2) \in (C)$ có phương trình:

$x_2x + y_2y - R^2 = 0$

MT_1 qua $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow x_1x_0 + y_1y_0 - R^2 = 0$

MT_2 qua $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow x_2x_0 + y_2y_0 - R^2 = 0$

$\Rightarrow$ Tọa độ T_1, T_2 thỏa mãn chung phương trình: $x_0x + y_0y - R^2 = 0$ (*) nên (*) là phương trình đường thẳng T_1T_2.

b. Gọi d là đường thẳng cố định có phương trình $y = ax + b$ (a, b là hằng số).

Gọi $M(m; am + b)$ là điểm di động trên d.

Thay $x_0 = m$, $y_0 = am + b$ vào phương trình T_1T_2:

$m.x + (am + b)y - R^2 = 0 \Leftrightarrow m(x + ay) = by - R^2 = 0$

Phương trình này luôn thỏa mãn $\forall m \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} by - R^2 = 0 \\ x + ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{R^2}{b} \\ x = \dfrac{-aR^2}{b} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua điểm cố định $A\left(\dfrac{-aR^2}{b};\dfrac{R^2}{b}\right)$ khi M di động trên đường thẳng cố định $y = ax + b$.

♦ Lời bình: Cần lưu ý phương pháp lập phương trình đường thẳng qua 2 tiếp điểm của 2 tiếp tuyến xuất phát từ một điểm ở ngoài một đường tròn đến đường tròn đó qua lời giải câu a của bài tập này: đó là phương pháp đơn giản, hợp lý, ngắn gọn nhất!

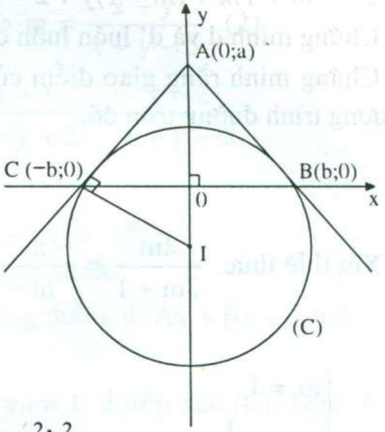
Bài 139. Cho ba điểm $A(0; a)$, $B(b; 0)$, $C(-b; 0)$ với $a > 0$, $b > 0$

a. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với đường thẳng AB tại B và tiếp xúc với đường thẳng AC tại C.

b. Gọi M là một điểm bất kì nằm trên đường tròn ở câu a) và gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ M tới các đường thẳng AB, AC, BC. Chứng minh rằng $d_1.d_2 = d_3^2$.

Giải

a. Xem hình vẽ:



$$AC = \sqrt{a^2 + b^2} = AC^2 = AO.AI$$

$$\Rightarrow AI = \frac{AC^2}{AO} = \frac{a^2 + b^2}{a}$$

$$\Rightarrow OI = AI - AO = \frac{a^2 + b^2}{a} - a = \frac{b^2}{a}$$

$$\Rightarrow I\left(0; -\frac{b^2}{a}\right)$$

Bán kính $IB^2 = OB^2 + OI^2 = b^2 + \dfrac{b^4}{a} = \dfrac{b^4 + a^2b^2}{a^2}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn cần tìm:

$$x^2 + \left(y + \frac{b^2}{a}\right)^2 = \frac{b^4 + a^2b^2}{a^2} \Leftrightarrow a^2x^2 + a^2y^2 + 2b^2ay = a^2b^2 \quad (C)$$

b. Gọi $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow a^2x^2 + a^2y^2 + 2ab^2y^2 = a^2b^2$

Phương trình đường thẳng AB: $\dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow ax + by - ab = 0$

Phương trình đường thẳng AC: $\frac{x}{-b} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow ax - by + ab = 0$

Phương trình đường thẳng BC: $y = 0$

$$d_1 = d(M, AB) = \frac{|ax + by - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_2 = d(M, AC) = \frac{|ax - by + ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d(M, BC) = \frac{|y|}{1} = d_3$$

$$d_1.d_2 = \frac{|ax + by - ab|.|ax - by + ab|}{a^2 + b^2} = \frac{|a^2x^2 - (by - ab)^2|}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{|a^2x^2 - b^2y^2 - a^2b^2 + 2ab^2y|}{a^2 + b^2} = \frac{|-b^2y^2 - a^2y^2|}{a^2 + b^2} = y^2 + d_3^2$$

Bài 140. Cho hai đường thẳng:

d: $2mx - (m + 1)y + 1 - 3m = 0$

d': $(3m + 1)x + (m - 1)y + 2 - 6m = 0$

a. Chứng minh d và d' luôn luôn cắt nhau.

b. Chứng minh rằng giao điểm của d và d' ở trên một đường tròn cố định. Tìm phương trình đường tròn đó.

Giải

a. Xét tỉ lệ thức: $\frac{2m}{3m + 1} = \frac{-(m + 1)}{m - 1}$ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\frac{1}{3} \\ 2m^2 - 2m = -3m^2 - 4m - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\frac{1}{3} \\ 5m^2 + 2m + 1 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ Vô nghiệm m $\Leftrightarrow$ (*) không thỏa mãn

$\Leftrightarrow$ d và d' luôn cắt nhau.

b. Xét hệ: $\begin{cases} 2mx - (m + 1)y + 1 - 3m = 0 \quad (1) \\ (3m + 1)x + (m - 1)y + 2 - 6m = 0 \quad (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow m(2x - y - 3) = y - 1 \Rightarrow m = \frac{y - 1}{2x - y - 3}$. Thế vào (2):

$$\left(\frac{3(y-1)}{2x-y-3}+1\right)x+\left(\frac{y-1}{2x-y-3}-1\right)y+2-\frac{6(y-1)}{2x-y-3}=0$$

$(3y-3+2x-y+3)x+(y-1-2x+y+3)y+2(2x-y-3)-6y+6=0$

$\Leftrightarrow (2x+2y)x+(-2x+2y+2)y+4x-2y-6-6y-6=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+2xy-2xy+2y^2+2y+4x-8y=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-3y=0 \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Bài 141. Cho hai đường thẳng d: $(m+1)x-my+2m+1=0$

d': $mx+(m+1)y-5m-2=0$

Chứng minh rằng tập hợp các giao điểm của d và d' là một đường tròn mà ta sẽ xác định phương trình.

Giải

Dễ thấy $\forall m \neq 0$ và $m \neq -1$, d và d' luôn cắt nhau

Từ phương trình d: $(m+1)x-my+2m+1=0 \Leftrightarrow m(x-y+2)=-x-1$

$$\Rightarrow m=\frac{-x-1}{x-y+2} \quad (1)$$

Từ phương trình d': $mx+(m+1)y-5m-2=0$

$$\Leftrightarrow m(x+y-5)=2-y \Rightarrow m=\frac{2-y}{x+y-5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2): $\frac{-x-1}{x-y+2}=\frac{2-y}{x+y-5} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-y+2}=\frac{y-2}{x+y-5}$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+y-5)=(y-2)(x-y+2)$

$\Leftrightarrow x^2+xy-5x+x+y-5=xy-y^2+2y-2x+2y-4$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-3y-1=0 \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Bài 142. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2=1$ và đường thẳng d: $Ax+By+1=0$

a. Tìm điều kiện của A và B để d tiếp xúc (C).

b. M và N là hai điểm thuộc (C) với $x_M=-1$; $y_N=1$. d tiếp xúc (C). Định A và B để tổng khoảng cách từ M và N đến d là nhỏ nhất.

Giải

a. d tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow d(0; d)=1 \Leftrightarrow \frac{|A.0+B.0+1|}{\sqrt{A^2+B^2}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{A^2+B^2}=1$

$$\Leftrightarrow A^2+B^2=1$$

b. $x_M=-1 \Leftrightarrow (-1)^2+y_M^2=1 \Leftrightarrow y_M=0 \Rightarrow M(-1; 0)$

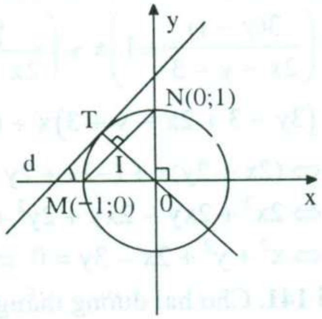
$y_N=1 \Leftrightarrow x_N^2+1^2=1 \Leftrightarrow x_N=0 \Rightarrow N(0; 1)$

Xem hình vẽ:

Gọi I là trung điểm MN $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

d(M; d) + d(N; d) = 2d(I; d)

Chỉ cần tìm điểm T ∈ (C) sao cho IT ngắn nhất: đó chính là điểm mà tại đó đường thẳng $Ax + By + 1 = 0$ có hệ số góc $-\frac{A}{B} = 1 \Leftrightarrow A = -B$.



Từ $A^2 + B^2 = 1 \Rightarrow A^2 + (-A)^2 = 1 \Leftrightarrow A^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 143. Cho hai đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

(C_2): $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$

a. Chứng minh (C_1) và (C_2) ngoài nhau. Tìm khoảng cách ngắn nhất và dài nhất nối một điểm của (C_1) với một điểm của (C_2).

b. Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn các điều kiện $a^2 + b^2 = 2(a + b)$ và $c^2 + d^2 + 36 = 12(c + d)$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$5\sqrt{2} - 7 \le \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \le 5\sqrt{2} + 7\,5.$$

Giải

a. (C_1): $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

(C_1) có tâm $I_1(1; 1)$, bán kính $R_1 = 2$

(C_2): $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0 \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-6)^2 = 36$

(C_2) có tâm $I_2(6; 6)$, bán kính $R_2 = 6$

$$I_1I_2 = \sqrt{(6-1)^2 + (6-1)^2} = 5\sqrt{2} > 1 + 6 = R_1 + R_2$$

⇔ (C_1) và (C_2) ở ngoài nhau.

Phương trình đường thẳng I_1I_2: $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{5} \Leftrightarrow x - y = 0$

Tọa độ các giao điểm của I_1I_2 và (C_1) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + x^2 - 2x - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

I_1I_2 cắt (C_1) tại $A\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ và $B\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2};\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

Tọa độ các giao điểm của I_1I_2 và (C_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 12x - 12y + 36 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - 24x + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 12x + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 3\sqrt{2} \\ y = 6 - 3\sqrt{2} \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x = 6 + 3\sqrt{2} \\ y = 6 + 3\sqrt{2} \end{cases}$$

I_1I_2 cắt (C_2) tại $C\left(6 + 3\sqrt{2}; 6 + 3\sqrt{2}\right)$ và $D\left(6 - 3\sqrt{2}; 6 - 3\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow$ Khoảng cách dài nhất giữa một điểm của (C_1) và một điểm của (C_2) là

$$BC = \sqrt{\left(+6 + 3\sqrt{2} - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(6 - 3\sqrt{2} - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 5\sqrt{2} + 7$$

Khoảng cách ngắn nhất giữa một điểm của (C_1) và một điểm của (C_2) là:

$$AD = \sqrt{\left(6 - 3\sqrt{2} - \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(6 - 3\sqrt{2} - \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 5\sqrt{2} - 7$$

b. Giả thiết $a^2 + b^2 + 1 = 2(a + b)$ chứng tỏ điểm $M(a; b) \in (C_1)$

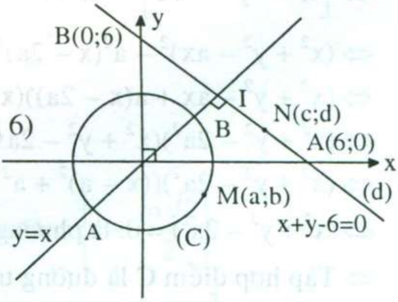
$c^2 + d^2 + 36 = 12(c + d)$ chứng tỏ điểm $N(c; d) \in (C_2)$

Theo câu a thì $\forall M \in (C_1)$, $N \in (C_2)$ ta đều có

$$5\sqrt{2} - 7 \le MN \le 5\sqrt{2} + 7$$

Bài 144. Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn các điều kiện $c + d = 6$, $a^2 + b^2 = 1$. Chứng minh bất đẳng thức: $c^2 + d^2 - 2ac - 2bd \ge 3\sqrt{2} - 2$.

Giải



Xem hình vẽ: xét hình tròn (C):

$x^2 + y^2 = 1$ và đường thẳng d: $x + y - 6 = 0$

d cắt trục Ox tại A(6; 0), cắt trục Oy tại B(0; 6)

I là trung điểm AB: I(3; 3)

Đường thẳng $x - y = 0$ qua I và cắt (C)

tại hai điểm A, B, trong đó $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$BI = \sqrt{\left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}\left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2} - 1$$

BI là khoảng cách ngắn nhất giữa một điểm thuộc (C) và d.

$\Rightarrow$ Với mọi $M(a; b) \in (C)$ và $N(c; d) \in d$ thì

$MN^2 \geq BI^2 \geq BI \Leftrightarrow MN^2 \geq BI$

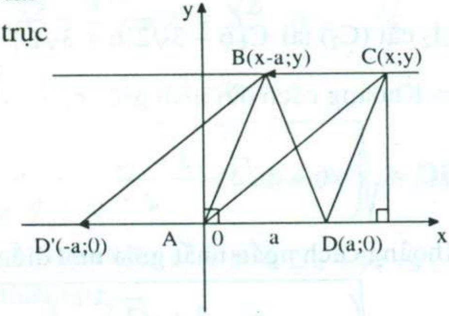
$\Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 \geq 3\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd \geq 3\sqrt{2} - 1$

$\Leftrightarrow c^2 + d^2 - 2ac - 2bd \geq 3\sqrt{2} - 2$.

Bài 145. Cho đoạn AD cố định. Hình bình hành ABCD thay đổi thỏa điều kiện $\frac{AC}{AD} = \frac{BD}{BA}$. Tìm tập hợp các đỉnh C và B.

Giải

Đặt hình bình hành ABCD vào hệ trục Oxy như hình vẽ. Giả sử AD = a (a > 0)



Coi $C(x; y) \Rightarrow B(x - a; y)$.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BD}{BA} \Leftrightarrow \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{BD^2}{BA^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{(a-x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{(a-x)^2+y^2+a^2+2a(a-x)}{(x-a)^2+y^2} = 1 + \frac{3a^2-2ax}{(x-a)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-a^2}{a^2} = \frac{3a^2-2ax}{(x-a)^2+y^2} = \frac{3a^2-2ax}{x^2+y^2+a^2-2ax}$$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2+y^2) + a^2(x^2+y^2) - a^4 - 2ax(x^2+y^2) + 2a^3x = 3a^4 - 2a^3x$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 - 2ax(x^2+y^2) - 4a^4 + 4a^3x = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)ax + a^2x^2 - a^2x^2 + 4a^3x - 4a^4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[x^2+y^2-ax\right]^2 - a^2(x^2 - 4ax + 4a^2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2-ax)^2 - a^2(x-2a)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2-ax+a(x-2a))(x^2+y^2-ax-a(x-2a)) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2a^2)(x^2+y^2-2ax+2a^2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2a^2)((x-a)^2+a^2+y^2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2a^2) = 0$: là phương trình đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm C là đường tròn tâm A, bán kính $R = a\sqrt{2}$.

Do B là đỉnh của C qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\overrightarrow{DA}$ nên tập hợp điểm B là đường tròn tâm D', bán kính $R = a\sqrt{2}$. Đường tròn này có phương trình:

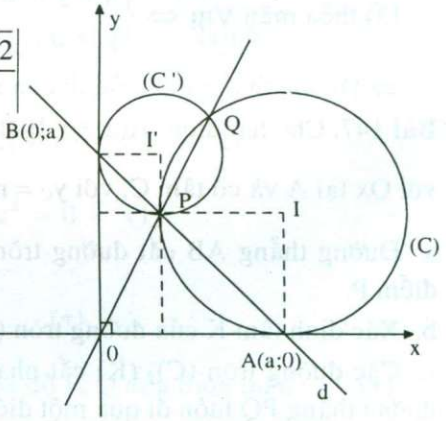
$$(x+a)^2 + y^2 = 2a^2$$

Bài 146. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai điểm A(a; 0), B(0; a) (a > 0)

a. Viết phương trình của đường tròn (C) tiếp xúc với Ox tại A và có tâm C với $y_C = \dfrac{m\sqrt{2}}{2}$ (m là tham số). Xác định giao điểm thứ hai P của (C) với đường thẳng AB.

b. Viết phương trình đường tròn (C') đi qua P và tiếp xúc với Oy tại B, C. Hai đường tròn (C), (C') cắt nhau tại P, Q. Viết phương trình đường thẳng PQ. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



a. $I\left(a; \dfrac{m\sqrt{2}}{2}\right)$. (C) tiếp xúc Ox nên: $R = \left|\dfrac{m\sqrt{2}}{2}\right|$

Phương trình (C):

$$(x-a)^2 + \left(y - \frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{2}$$

Gọi d là đường thẳng AB:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow x + y - a = 0$$

Thế y = a − x vào phương trình (C)

$$x^2 + y^2 - 2ax - m\sqrt{2}y + a^2 = 0$$

$$x^2 + (a-x)^2 - 2ax + a^2 - m\sqrt{2}y(a-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a-x)^2\ \sqrt{2}m(a-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-x)(2(a-x) - m\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = a - \dfrac{m\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow P\left(a - \frac{m\sqrt{2}}{2}; \frac{m\sqrt{2}}{2}\right)$$

b. (C') có tâm $I'\left(a - \dfrac{m\sqrt{2}}{2}; a\right)$, tiếp xúc Oy nên $R = \left|a - \dfrac{m\sqrt{2}}{2}\right|$

Phương trình (C'): $\left(x - a + \dfrac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (y-a)^2 = \left(a - \dfrac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2$

Khai triển $x^2 + y^2 - 2\left(a - \dfrac{m\sqrt{2}}{2}\right)x + \left(a - \dfrac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2ay + a^2 = \left(a - \dfrac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\left(a - \dfrac{m\sqrt{2}}{2}\right)x - 2ay + a^2 = 0 \quad (1)$

Khai triển phương trình (C): $x^2 + y^2 - 2ax - m\sqrt{2}y + a^2 = 0 \quad (2)$

Trừ từng vế (1) và (2): $m\sqrt{2}x + m\sqrt{2}y - 2ay = 0 \quad (3)$

Tọa độ hai điểm chung P và Q của (C) và (C') đều thỏa mãn (3)

$\Rightarrow$ (3) chính là phương trình đường thẳng PQ

(3) $\Leftrightarrow m\sqrt{2}(x + y) - 2ay = 0$

(3) thỏa mãn $\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Đường thẳng PQ luôn đi qua gốc O(0; 0).

Bài 147. Cho hai điểm A(a; 0), B(0; b) với $ab \neq 0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với Ox tại A và có tâm C, với $y_C = m$ (m là tham số khác 0 và khác $\dfrac{a^2 + b^2}{2b}$)

a. Đường thẳng AB cắt đường tròn (C) tại giao điểm thứ hai là P. Tính tọa độ điểm P.

b. Xác định tâm K của đường tròn (K) đi qua P và tiếp xúc với Oy tại B.

c. Các đường tròn (C), (K) cắt nhau tại P và Q. Chứng tỏ rằng khi m thay đổi, đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định

Giải

a. Phương trình đường thẳng AB: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

$$\Leftrightarrow bx + ay - ab = 0 \Leftrightarrow y = \frac{ab - bx}{a}$$

(C) có tâm C(a; m): bán kính $R = |m|$. Phương trình (C):

$(x - a)^2 + (y - m)^2 = m^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2my + a^2 = 0 \quad (1)$

Thế $y = \dfrac{ab - bx}{a}$ vào (1):

$$x^2 + \left(\frac{ab - bx}{a}\right)^2 - 2ax - 2m\left(\frac{ab - bx}{a}\right) + a^2 = 0$$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + b^2x^2 - 2ab^2x + a^2b - 2a^3x - 2ma^2b + 2ambx + a^4 = 0$

$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)x^2 - 2x(a^2 + b^2 - mb)x + (a^2b^2 - 2mb)a^2 = 0$

Phương trình này chắc chắn có một nghiệm là $x_A = a$

Nghiệm thứ hai là x_P thì $x_P + a = \dfrac{2a(a^2 + b^2 - mb)}{a^2 + b^2}$

$\Rightarrow x_P = a - \dfrac{2amb}{a^2 + b^2} \Rightarrow y_P = \dfrac{2mb^2}{a^2 + b^2}$

Vậy $P\left(a - \dfrac{2amb}{a^2 + b^2}; \dfrac{2mb^2}{a^2 + b^2}\right)$.

b. K có $x_K = x_P = a - \dfrac{2amb}{a^2 + b^2}$; $y_K = b$

Bán kính (K) $R = \left|a - \dfrac{2amb}{a^2 + b^2}\right|$; $K\left(a - \dfrac{2amb}{a^2 + b^2}; b\right)$

Phương trình (K): $\left(x - a + \dfrac{2amb}{a^2 + b^2}\right)^2 + (y - b)^2 = \left(a - \dfrac{2amb}{a^2 + b^2}\right)$

Khai triển: $x^2 + y^2 - 2\left(a - \dfrac{2amb}{a^2 + b^2}\right)x - 2by + b^2 = 0$ (2)

Phương trình (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2my + a^2 = 0$ (1)

Trừ từng vế (2) và (1):

$$\frac{4amb}{a^2 + b^2}x - 2(b - m)y + b^2 - a^2 = 0 \qquad (*)$$

Đây là phương trình đường thẳng PQ, do tọa độ P, Q đều thỏa mãn (*)

$$(*) \Leftrightarrow m\left(\frac{4ba}{a^2 + b^2}x + 2y\right) + b^2 - a^2 - 2by = 0$$

$$(*) \text{ thỏa mãn } \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4ba}{a^2 + b^2}x + 2y = 0 \\ y = \dfrac{b^2 - a^2}{2b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a^4 - b^4}{4ab^2} \\ y = \dfrac{b^2 - a^2}{2b} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Điểm cố định mà PQ luôn đi qua $M\left(\dfrac{a^4 - b^4}{4ab^2}; \dfrac{b^2 - a^2}{2b}\right)$

Bài 148. Cho tam giác ABC với các đỉnh $A(x_1; y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

Giải

Gọi $M(x; y)$

$MA^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = x^2 + y^2 - 2x_1x - 2y_1y + x_1^2 + y_1^2$

$MB^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 = x^2 + y^2 - 2x_2x - 2y_2y = x_2^2 + y_2^2$

$MC^2 = (x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 = x^2 + y^2 - 2x_3x - 2y_3y + x_3^2 + y_3^2$

$MA^2 + MB^2 = MC^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x_1x - 2y_1y + x_1^2 + y_1^2 + x^2 + y^2 - 2x_2x - 2y_2y + x_2^2 + y_2^2$$

$$= x^2 + y^2 - 2x_3x - 2y_3y + x_3^2 + y_3^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(x_1 + x_2 - x_3)x - 2(y_1 + y_2 - y_3)y + x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - x_2^3 - y_3^2 = 0$$

Tập hợp này là đường tròn khi

$$x_3^2 + y_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + y_1y_2 - y_1y_3 - y_2y_3 > 0.$$

Bài 149. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cos 2x + \cos 2y = m \end{cases}$

Giải

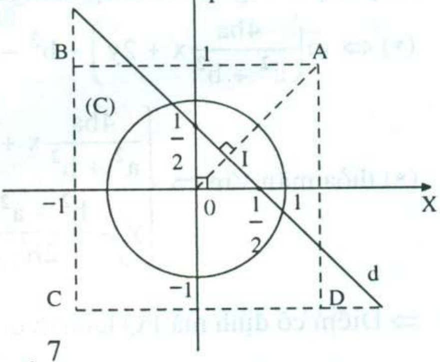
Đặt sinx = X, siny = Y $\quad \left(|X| \le 1, |Y| \le 1\right)$

$$\cos 2x + \cos 2y = 1 - 2\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 y = 2 - 2(X^2 + Y^2)$$

$$\cos 2x + \cos 2y = m \Leftrightarrow 2 - 2(X^2 + Y^2) = m \Leftrightarrow X^2 + Y^2 = \frac{2-m}{2} \quad (m \le 2)$$

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cos 2x + \cos 2y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y - \dfrac{1}{2} = 0 \ (1) \\ X^2 + Y^2 = \dfrac{2-m}{2} \ (2) \end{cases}$$

Hệ (1), (2) được xét trong hình vuông ABCD trên hình vẽ



Để hệ có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2-m}{2}} \le 1 \\ OI \le \sqrt{\dfrac{2-m}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{m}{2} \le 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \le \sqrt{1 - \dfrac{m}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \ge m \ge 0 \\ \dfrac{1}{8} \le 1 - \dfrac{m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le m \le 2 \\ \dfrac{m}{2} \le \dfrac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{7}{4}.$$

Chương IV. ELIP

I. TÓM TẮT GIÁO KHOA

- Định nghĩa: Elip (E) = $\{M(x;y) / F_1M + F_2M = 2a\}$

  F_1, F_2: hai tiêu điểm

  $F_1F_2 = 2c$: tiêu cự Phương trình: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(b^2 = a^2 - c^2)$

  2a: độ dài trục lớn

- Hình dạng và các phần tử hình học

  A_1, A_2, B_1, B_2: các đỉnh

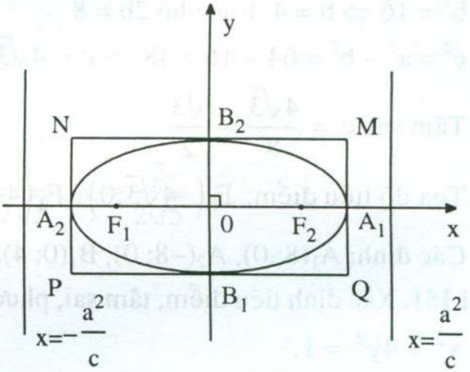
  $A_1A_2 = 2a$: trục lớn

  $b^2 = a^2 - c^2$

  $B_1B_2 = 2b$: trục nhỏ

  $e = \dfrac{c}{a}$: tâm sai $\left(\dfrac{c}{a} < 1\right)$

  $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$: tiêu điểm



- $M(x; y) \in (E)$:

  $F_1M = a + \dfrac{c}{a}x$: bán kính qua tiêu trái.

  $F_2M = a - \dfrac{c}{a}x$: bán kính qua tiêu phải.

  $x = -\dfrac{a^2}{c}$: đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1

  $x = \dfrac{a^2}{c}$: đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2

  MNPQ: hình chữ nhật cơ sở

  O: tâm đối xứng của Elip.

II. ĐỀ TOÁN VÀ LỜI GIẢI

Bài 150. Xác định độ dài hai trục, tiêu cự, tâm sai, tọa độ tiêu điểm, các đỉnh của elip.

a. $4x^2 + 5y^2 = 20$. b. $x^2 + 4y^2 - 64 = 0$.

Giải

a. $4x^2 + 5y^2 = 20 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

$a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$: trục lớn $2a = 2\sqrt{5}$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$: trục nhỏ $2b = 4$

$c^2 = a^2 - b^2 = 5 - 4 = 1 \Rightarrow c = 1$: tiêu cự $2c = 2$

Tọa độ tiêu điểm: $F_1(-1;0)$, $F_2(1;0)$ và tâm sai $e = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Các đỉnh $A_1\left(\sqrt{5};0\right)$, $A_2\left(-\sqrt{5};0\right)$, $B_1(0;2)$, $B_2(0;-2)$

b. $x^2 + 4y^2 = 64 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$: trục lớn $2a = 16$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$: trục nhỏ $2b = 8$

$c^2 = a^2 - b^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow c = 4\sqrt{3} \Rightarrow$ tiêu cự $2c = 8\sqrt{3}$

Tâm sai $e = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Tọa độ tiêu điểm: $F_1\left(-4\sqrt{3};0\right)$, $F_2\left(4\sqrt{3};0\right)$

Các đỉnh: $A_1(8;0)$, $A_2(-8;0)$, $B_1(0;4)$, $B_2(0;-4)$

Bài 151. Xác định tiêu điểm, tâm sai, phương trình các đường chuẩn của các elip.

a. $x^2 + 4y^2 = 1$.

b. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{1}{36}$.

c. $mx^2 + my^2 = 1$ $(m > 0, n > 0, m \neq n)$.

Giải

a. $x^2 + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

$a^2 = 1,\ b^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow c^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ Tiêu điểm $F_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $F_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Tâm sai $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Phương trình các đường chuẩn $x = -\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

b. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{1}{36}\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$

$a^2=\dfrac{1}{4},\ b^2=\dfrac{1}{9}\Rightarrow c^2=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{5}{36}\Rightarrow c=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$

$\Rightarrow$ Tiêu điểm $F_1\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{6};0\right)$, $F_2\left(\dfrac{\sqrt{5}}{6};0\right)$

Tâm sai $e=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Phương trình các đường chuẩn: $x=-\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$, $x=\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$

c. $mx^2+ny^2=1\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{\frac{1}{m}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$

$a^2=\dfrac{1}{m},\ b^2=\dfrac{1}{n}\Rightarrow c^2=\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n-m}{m.n}$

$c=\sqrt{\dfrac{n-m}{m.n}}$

- Tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{\dfrac{n-m}{m.n}};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{\dfrac{n-m}{m.n}};0\right)$.
- Tâm sai $e=\dfrac{\sqrt{\frac{n-m}{m.n}}}{\frac{1}{\sqrt{m}}}=\sqrt{\dfrac{n-m}{n}}$.
- Phương trình các đường chuẩn: $x=-\sqrt{\dfrac{n}{mn-m^2}}$; $x=\sqrt{\dfrac{n}{mn-m^2}}$.

Bài 152. Xác định tâm đối xứng, độ dài hai trục, tiêu cự, tâm sai, các tiêu điểm, các đỉnh, phương trình đường chuẩn của các elip.

a. $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$. b. $3x^2+4y^2-6x-16y-29=0$.

Giải

a. $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$

$\Leftrightarrow 16(x^2-2x+1)+25(y^2+2y+1)=359+16+25$

$\Leftrightarrow 16(x-1)^2 + 25(y+1)^2 = 400$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

Thực hiện phép tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (1; -1)$:

$$\begin{cases} x = 1 + X \\ y = -1 + Y \end{cases}$$

Trong hệ trục IXY, phương trình elip trở thành:

$$\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} = 1$$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow$ trục lớn $2a = 10$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow$ trục nhỏ $2b = 8$

$c^2 = 25 - 26 = 9 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow$ tiêu cự $2c = 6$

Tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$

Trong hệ IXY: $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$

Trong hệ Oxy: $F_1(-2; -1)$, $F_2(4; -1)$

Các đỉnh $A_1(5; 0)$ Hệ Oxy: $A_1(6; -1)$

$A_2(-5; 0)$ Hệ Oxy: $A_2(-4; -1)$

$B_1(0; 4)$ Hệ Oxy: $B_1(1; 3)$

$B_2(0; -4)$ Hệ Oxy: $B_2(1; -5)$

Phương trình đường chuẩn:

Hệ IXY: $X = -\dfrac{25}{3}$ Hệ Oxy: $x = -\dfrac{22}{3}$

Hệ IXY: $X = \dfrac{25}{3}$ Hệ Oxy: $x = \dfrac{28}{3}$

b. Làm tương tự như phần a.

Bài 153. Tìm tâm sai của elip biết:

a. Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới góc 2α.

b. Đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới góc 2α

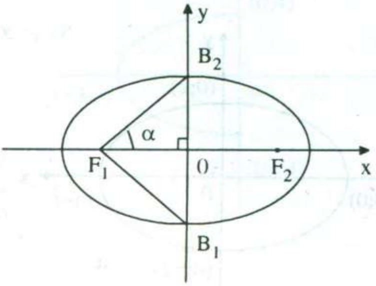
c. Khoảng cách giữa hai đỉnh trên hai trục bằng k lần tiêu cự $\left(k < \dfrac{1}{2}\right)$.

d. Khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng k lần tiêu cự.

Giải

a. Xem hình vẽ

$B_1\widehat{F_1}B_2 = 2\alpha \Rightarrow OF_1B_2 = \alpha$



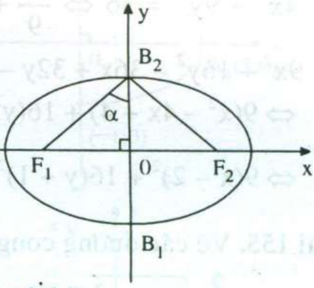
$$\frac{OB_2}{OF_1} = \frac{b}{c} = \tan\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{c^2} = \tan^2\alpha \Leftrightarrow \frac{a^2 - c^2}{c^2} = \tan^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} = 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2} = \cos^2\alpha \Leftrightarrow e = \frac{c}{a} = \cos\alpha$$

b. Xem hình vẽ:



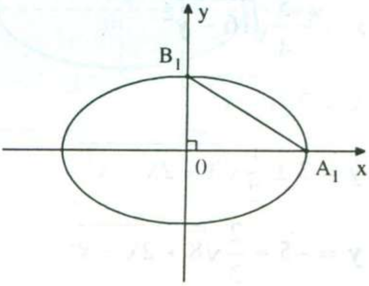
$F_1\widehat{B_2}O = \alpha$; $OF_1 = c$, $OB_2 = b$

$$\cot\alpha = \frac{OB_2}{OF_1} = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 - c^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} = 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \sin^2\alpha \Rightarrow \frac{c}{a} = \sin\alpha$$

c. $A_1B_1 = 2kc$



Tam giác vuông OA_1B_1 có:

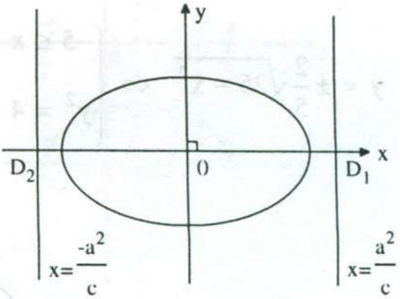
$OA_1^2 + OB_1^2 = A_1B_1^2$

$a^2 + b^2 = 4k^2c \Leftrightarrow a^2 + a^2 - c^2 = 4k^2c^2$

$\Leftrightarrow 2a^2 = c^2(1 + 4k^2)$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{1 + 4k^2} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{1 + 4k^2}}$$

d. Xem hình vẽ: $D_1D_2 = \dfrac{2a^2}{c}$



Theo giả thiết:

$$\frac{2a^2}{c} = k.2c \Leftrightarrow a^2 = k.c^2$$

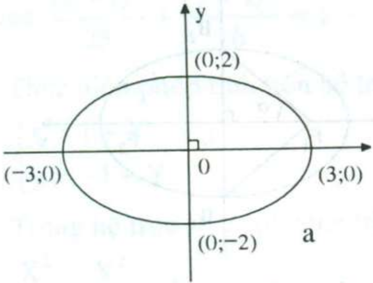
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

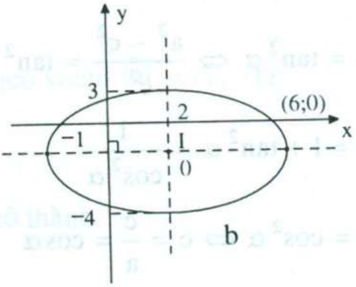
Bài 154. Vẽ các elip:

a. $4x^2 + 9y^2 = 36$

b. $9x^2 + 16y^2 - 36x + 32y - 92 = 0$

Giải





a. $4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

b. $9x^2 + 16y^2 - 36x + 32y - 92 = 0$

$\Leftrightarrow 9(x^2 - 4x + 4) + 16(y^2 + 2y + 1) = 92 + 36 + 16$

$\Leftrightarrow 9(x-2)^2 + 16(y+1)^2 = 144 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

Bài 155. Vẽ các đường cong:

a. $y = \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{25 - x^2}$

b. $x = -\dfrac{5}{4}\sqrt{16 - y^2}$

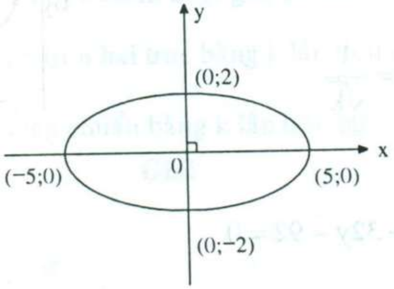
c. $x = 7\sqrt{1 - y^2}$

d. $y = 3 \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{3 - 2x - x^2}$

e. $y = -5 + \dfrac{2}{3}\sqrt{8 + 2x - x^2}$

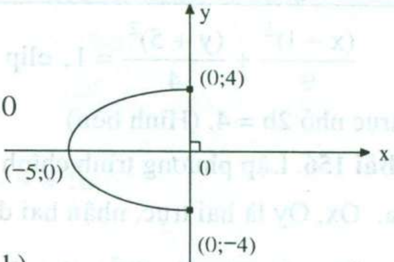
Giải

a. $y = \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{25 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \le x \le 5 \\ y^2 = 4 - \dfrac{4x^2}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \le x \le 5 \\ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$



b. $x = -\dfrac{5}{4}\sqrt{16 - y^2}$

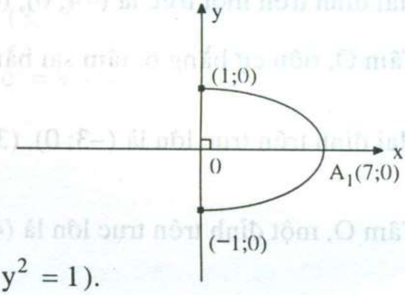
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le y \le 4 \\ x^2 = \dfrac{25}{16}\left(16 - y^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le y \le 4,\ x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$$



(nửa bên trái trục hoành của elip $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$).

c. $x = 7 + \sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0,\ -1 \le y \le 1 \\ x^2 = 49 - 49y^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0,\ -1 \le y \le 1 \\ \dfrac{x^2}{49} + y^2 = 1 \end{cases}$$



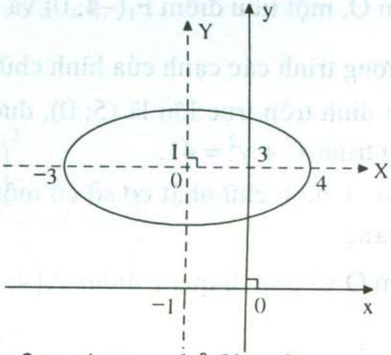
(nửa bên phải trục hoành của elip $\dfrac{x^2}{49} + y^2 = 1$).

d. $y = 3 \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{3 - 2x - x^2}$

$$\Leftrightarrow (y - 3) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 - (x + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (y - 3)^2 = \frac{1}{4}(4 - (x + 1))^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{1} = 1$$



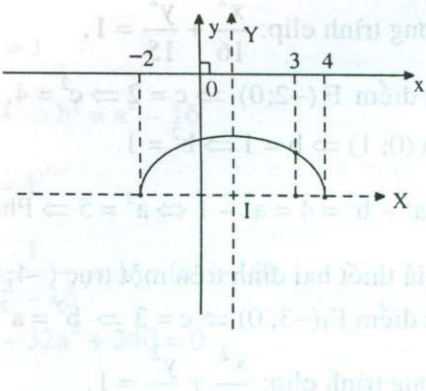
Là elip có tâm đối xứng I(−1; 3) trục lớn 2a = 4, trục nhỏ 2b = 2.

e. $y = -5 + \dfrac{2}{3}\sqrt{8 + 2x - x^2}$

$$\Leftrightarrow y + 5 = \frac{2}{3}\sqrt{9 - (x - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -5;\ -2 \le x \le 4 \\ (y + 5)^2 = \dfrac{4}{9}(9 - (x - 1))^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -5;\ -2 \le x \le 4 \\ \dfrac{(x - 1)^2}{9} + \dfrac{(y + 5)^2}{4} = 1 \end{cases}$$



Là nửa phía trên của elip:

$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+5)^2}{4}=1$, elip này có tâm đối xứng I(1; –5), trục lớn 2a = 6, trục nhỏ 2b = 4. (Hình bên)

Bài 156. Lập phương trình chính tắc của elip có:

a. Ox, Oy là hai trục, nhận hai điểm (–4; 0), $\left(0;\sqrt{15}\right)$ làm hai đỉnh.

b. Tâm O, một tiêu điểm là (–2; 0), một đỉnh là (0; 1).

c. Hai đỉnh trên một trục là (–4; 0), (4; 0), tiêu điểm (–3; 0).

d. Tâm O, tiêu cự bằng 6, tâm sai bằng $\dfrac{3}{5}$.

e. Hai đỉnh trên trục lớn là (–3; 0), (3; 0), tâm sai bằng $\dfrac{2}{3}$.

f. Tâm O, một đỉnh trên trục lớn là (4; 0), elip qua điểm $M\left(2;\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$.

g. Tâm O, một tiêu điểm $F_1(-4;0)$ và elip đi qua điểm $M\left(\sqrt{15};-1\right)$.

h. Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x \pm 4 = 0$; $y \pm 3 = 0$.

i. Một đỉnh trên trục lớn là (5; 0), đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở có phương trình $x^2 + y^2 = 41$.

j. Tâm O, hình chữ nhật cơ sở có một cạnh nằm trên đường thẳng y = 2, đường chéo bằng 6.

k. Tâm O và elip đi qua 2 điểm $A\left(4;\sqrt{3}\right)$, $B\left(2\sqrt{2};-3\right)$.

Giải

a. Ox, Oy là hai trục. Đỉnh (–4; 0) ⇒ a = 4. Đỉnh $\left(0;\sqrt{15}\right) \Rightarrow b=\sqrt{15}$.

Phương trình elip: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{15}=1$.

b. Tiêu điểm $F_1(-2;0) \Rightarrow c = 2 \Rightarrow c^2 = 4$.

Đỉnh $(0;1) \Rightarrow b = 1 \Rightarrow b^2 = 1$.

$c^2 = a^2 - b^2 = 4 = a^2 - 1 \Leftrightarrow a^2 = 5 \Rightarrow$ Phương trình elip: $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{1}=1$.

c. Từ giả thiết hai đỉnh trên một trục (–4; 0), (4; 0) ⇒ a = 4

Tiêu điểm $F_1(-3;0) \Rightarrow c = 3 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$

Phương trình elip: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$.

d. Phương trình elip có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Tiêu cự $2c = 6 \Rightarrow c = 3$

Tâm sai $\frac{c}{a}=\frac{3}{5} \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$

$\Rightarrow$ Phương trình elip: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

e. Từ giả thiết hai đỉnh trên trục lớn $(-3; 0), (3; 0) \Rightarrow a = 3$.

Tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3} \Rightarrow c = 2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$.

$\Rightarrow$ Phương trình elip: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

f. Phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Giả thiết $(4; 0)$ là một đỉnh trên trục lớn $\Rightarrow a = 4$.

$\Rightarrow$ Phương trình elip: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Elip qua $M\left(2;\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{2^2}{16}+\frac{\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{27}{4b^2}=1$

$\Leftrightarrow \frac{27}{4b^2}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow b^2 = 9$

$\Rightarrow$ Phương trình elip: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

g. Phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Giả thiết tiêu điểm $F_1(-4;0) \Rightarrow c = 4 \Rightarrow b^2 = a^2 - 16$

$\Rightarrow$ Phương trình elip: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-16}=1$

Elip qua điểm $M\left(\sqrt{15};-1\right) = \frac{15}{a^2}+\frac{1}{a^2-16}=1 \quad (a^2 > 16)$

$\Leftrightarrow 15a^2 - 240 + a^2 = a^4 - 16a^2 \Leftrightarrow a^4 - 32a^2 + 240 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = 12\ (\text{loại}) \\ a^2 = 20 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Phương trình elip: $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

h. Dễ dàng: từ hai cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x \pm 4 = 0 \Rightarrow a = 4$

$y \pm 3 = 0 \Rightarrow b = 3$

$\Rightarrow$ Phương trình elip: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

i. Giả thiết một đỉnh trên trục lớn là $(5; 0) \Rightarrow a = 5$

Bán kính $R = \sqrt{41}$ của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở cho biết:

$a^2 + b^2 = 41 \Rightarrow b^2 = 41 - a^2 = 41 - 25 = 16$.

$\Rightarrow$ Phương trình elip cần tìm: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

j. Phương trình elip có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Một cạnh của hình chữ nhật cơ sở $y = 2 \Rightarrow b = 2$

Đường chéo hình chữ nhật cơ sở bằng $6 \Rightarrow a^2 + b^2 = 9$

$\Rightarrow a^2 = 9 - b^2 = 9 - 4 = 5$

Phương trình elip: $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

k. Phương trình elip có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Elip qua $A\left(4; \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{3}{b^2} = 1$ (1)

Elip qua $B\left(2\sqrt{2}; -3\right) \Leftrightarrow \dfrac{8}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1$ (2)

Giải hệ (1), (2) với hai ẩn $\dfrac{1}{a^2}$, $\dfrac{1}{b^2}$ được: $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{6}{120} = \dfrac{1}{2b}$; $\dfrac{1}{b^2} = \dfrac{8}{120} = \dfrac{1}{15}$

Phương trình elip cần tìm: $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{15} = 1$.

Bài 157. Lập phương trình chính tắc của elip có:

a. Tâm O, tâm sai $e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; khoảng cách giữa hai đường chuẩn là $8\sqrt{2}$

b. Tâm O, khoảng cách giữa hai đường chuẩn là 10, elip đi qua điểm $M\left(-\sqrt{5}; 2\right)$.

c. Tâm O, trục nhỏ bằng 4, phương trình hai đường chuẩn là $x \pm 5 = 0$

d. Tâm O, elip đi qua $M\left(-2;\sqrt{2}\right)$ và phương trình hai đường chuẩn là $x \pm 4 = 0$

e. Tâm O, elip qua M(8; 12). Bán kính qua tiêu điểm trái của điểm M bằng 20.

f. Tâm O, elip qua điểm $M\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$ và điểm M nhìn đoạn thẳng nối hai điểm F_1F_2 dưới góc $\frac{\pi}{3}$.

Giải

a. Phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow c = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, khoảng cách giữa hai đường chuẩn là $\frac{2a^2}{c} = 8\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{2a^2}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{4a}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 4 \Leftrightarrow c = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 8 = 8$. Phương trình elip: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$

b. Phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Khoảng cách giữa hai đường chuẩn: $\frac{2a^2}{c} = 10 \Rightarrow a^2 = 5c$

$b^2 = a^2 - c^2 = 5c - c^2$

Dạng của elip: $\frac{x^2}{5c} + \frac{y^2}{5c - c^2} = 1 \quad (c \neq 5)$

Elip qua $M\left(-\sqrt{5};2\right) \Leftrightarrow \frac{5}{5c} + \frac{4}{5c - c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{c} + \frac{4}{5c - c^2}$

$\Leftrightarrow 5c - c^2 + 4c = 5c^2 - c^3 \Leftrightarrow c^3 - 6c^2 + 9c = 0$

$\Leftrightarrow c(c^2 - 6c + 9) = 0 \Leftrightarrow c = 3 \Rightarrow a^2 = 15, b^2 = a^2 - c^2 = 15 - 9 = 6$

$\Rightarrow$ Phương trình elip: $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$

c. Phương trình elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Trục nhỏ $2b = 4 \Rightarrow b = 2$

Phương trình hai đường chuẩn $x \pm 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = 5 \Leftrightarrow a^2 = 5c$

$$b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow 4 = 5c - c^2 \Leftrightarrow c^2 - 5c + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1 \Rightarrow a^2 = 5 \\ c = 4 \Rightarrow a^2 = 20 \end{array}\right.$$

Có hai elip thỏa yêu cầu bài toán: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ hay $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.

d. Phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Từ phương trình hai đường chuẩn $x \pm 4 = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{c} = 4 \Leftrightarrow a^2 = 4c$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4c - c^2$$

Elip qua $M\left(-2; \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \frac{(-2)^2}{4c} + \frac{(\sqrt{2})^2}{4c - c^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{c} + \frac{2}{4c - c^2} = 1 \Leftrightarrow 4c - c^2 + 2c = 4c^2 - c^3$ điều kiện $(c \neq 0, c \neq 4)$

$$\Leftrightarrow c^3 - 5c^2 + 6c = 0 \Leftrightarrow c(c^2 - 5c + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 2 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow b^2 = 4 \\ c = 3 \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow b^2 = 3 \end{array}\right.$$

Có hai elip thỏa yêu cầu bài toán:

$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ hay $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$

e. Phương trình elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Giả thiết bán kính qua tiêu điểm bên trái của M(8; 12) bằng 20 cho biết:

$$a + \frac{8c}{a} = 20 \Leftrightarrow a^2 = 8c = 20a \Leftrightarrow c = \frac{20a - a^2}{8}$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \left(\frac{20a - a^2}{8}\right)^2 = \frac{64a^2 - 400a^2 + 40a^3 - a^4}{64}$$

$$= \frac{40a^3 - a^4 - 336a^3}{64}.$$

Điểm $M(8; 12) \in$ elip $\Leftrightarrow \frac{64}{a^2} + \frac{144.64}{40a^3 - a^4 - 336a^2} = 1$

$$\Leftrightarrow 2560a^3 - 64a^4 - 21504a^2 + 9216a^2 = a^2(40a^3 - a^4 - 336a^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2(2560a - 64a^2 - 12288) = a^2(40a^3 - a^4 - 336a^2)$$

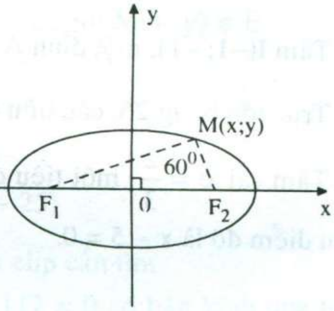
$$\Leftrightarrow a^4 - 40a^3 + 272a^2 + 2560a - 112288 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-4)(a-16)(a^2 - 20a + 192) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \Rightarrow c = \dfrac{80-16}{8} = 8(\text{loại}) \\ a = 16 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow b^2 = 92 \end{array}\right.$$

Phương trình elip cần tìm: $\dfrac{x}{256} + \dfrac{y^2}{92} = 1$

f. Phương trình elip có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Elip qua $M\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\dfrac{1}{3}\right)$



$$\Leftrightarrow \frac{32}{9a^2} + \frac{1}{9b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = \frac{a^2}{9a^2 - 32}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = a^2 - \frac{a^2}{9a^2 - 32}.$$

Trên hình vẽ: $F_1M = a + \dfrac{c}{a}.\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, $F_2M\ a - \dfrac{c}{a}.\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

Tam giác MF_1F_2 cho: $F_1F_2^2 = F_1M^2 + F_2M^2 - 2F_1M.F_2M.\cos 60^0$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = \left(a + \frac{c}{a}.\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(a - \frac{c}{a}.\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 2\left(a + \frac{c}{a}.\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\left(a - \frac{c}{a}.\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = 2a^2 + 2.\frac{c^2}{a^2}.\frac{32}{9} - \left(a^2 - \frac{c^2}{a}.\frac{32}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = a^2 + \frac{32}{3}.\frac{c^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^2 - \frac{a^2}{9a^2 - 32}\right) = a^2 + \frac{32}{3a^2}\left(a^2 - \frac{a^2}{9a^2 - 32}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4a^2\left(1 - \frac{1}{9a^2 - 32}\right) = a^2\left[1 + \frac{32}{3a^2}\left(1 - \frac{1}{9a^2 - 32}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 4 - \frac{4}{9a^2 - 32} = 1 + \frac{32}{3a^2} - \frac{32}{3a^2(9a^2 - 32)}$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{4}{9a^2 - 32} = \frac{32}{3a^2} - \frac{32}{3a^2(9a^2 - 32)}$$

$$\Leftrightarrow 9a^2(9a^2 - 32) - 12a^2 = 32(9a^2 - 32) - 32$$

$$\Leftrightarrow 81a^4 - 588a^2 + 1056 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = 4 \\ a^2 = \dfrac{264}{81} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$a^2 = 4 \Rightarrow b^2 = 1$. Phương trình elip cần tìm: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

Bài 158. Lập phương trình của elip có:

a. Tâm I(1; –2), một tiêu điểm $F_1\left(1 - 2\sqrt{3}; -2\right)$, độ dài trục nhỏ bằng 4.

b. Tâm I(–1; –1), một đỉnh A(–1; 5), tâm sai $e = \dfrac{2}{5}$.

c. Trục lớn bằng 26, các tiêu điểm $F_1\left(-10,0\right)$, $F_2(14; 0)$.

d. Tâm sai $e = \dfrac{2}{3}$, một tiêu điểm là F(2; 1), phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó là x – 5 = 0.

Giải

a. Thực hiện tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (1; -2)$

$\begin{cases} x = 1 + X \\ y = -2 + Y \end{cases}$. Trong hệ trục IXY, $F_1\left(-2\sqrt{3}; 0\right) \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$

Trục nhỏ $2b = 4 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 12 + 4 = 16$

Phương trình elip trong hệ IXY: $\dfrac{X^2}{16} + \dfrac{Y^2}{4} = 1$

$\Rightarrow$ Trong hệ Oxy: $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$.

b. Thực hiện đổi trục bằng tịnh tiến hệ Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (-1; -1)$

$\begin{cases} x = -1 + X \\ y = -1 + Y \end{cases} \Rightarrow$ Trong hệ trục IXY: A(0; 6) $\Rightarrow$ a = 6.

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{c}{6} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow c = 4 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$

$\Rightarrow$ Phương trình elip trong hệ IXY: $\dfrac{X^2}{36} + \dfrac{Y^2}{20} = 1$

$\Rightarrow$ Trong hệ Oxy: $\dfrac{(x+1)^2}{36} + \dfrac{(y+1)^2}{20} = 1$.

c. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng F_1F_2: I(2; 0)

Tịnh tiến $\begin{cases} x = 2 + X \\ y = Y \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} F_1F_2 = 24 = 2c \quad c = 12 \\ \text{Trục lớn } 2a = 26 \quad a = 13 \end{array}\right\} b^2 = a^2 - c^2 = 169 - 144 = 25$$

Phương trình elip trong hệ IXY: $\dfrac{X^2}{169} + \dfrac{Y^2}{25} = 1$

Trong hệ Oxy: $\dfrac{(x-2)^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

d. Theo một tính chất của đường chuẩn: $\dfrac{FM}{d(M,(\Delta))} = e$, gọi $M(x; y) \in E$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}}{|x-5|} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 9\left[x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1\right] = 4(x^2 - 10x + 25)$$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 55 = 0$ là phương trình elip cần tìm.

Bài 159. Tìm những điểm trên elip: $7x^2 + 16y^2 - 112 = 0$ có bán kính qua tiêu điểm trái bằng $\dfrac{5}{2}$.

Giải

$$7x^2 + 16y^2 - 112 = \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

$$\Rightarrow a = 4,\ c = \sqrt{16 - 7} = 3 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$

$$F_1M = a + \frac{c}{a}x = 4 + \frac{3}{4}x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = \frac{5}{2} - 4 = \frac{-3}{2} \Leftrightarrow x = -2$$

$$y = \pm\frac{1}{4}\sqrt{112 - 7x^2} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{112 - 28} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{84} = \pm\frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Các điểm cần tìm: $A\left(-2; -\dfrac{\sqrt{21}}{2}\right)$, $B\left(-2; \dfrac{\sqrt{21}}{2}\right)$.

Bài 160.

a. Lập phương trình của elip (E) có tâm là gốc tọa độ và đi qua hai điểm $P(-3; 1)$, $Q\left(4; \dfrac{-\sqrt{2}}{3}\right)$.

b. Tìm những điểm trên (E) có bán kính qua tiêu điểm này bằng hai lần bán kính qua tiêu điểm kia.

Giải

a. Phương trình (E) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(E) qua P(–3; 1) $\Leftrightarrow \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$

(E) qua $Q\left(4;-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\Leftrightarrow \dfrac{16}{a^2}+\dfrac{2}{9b^2}=1$. Giải hệ này theo ẩn $\dfrac{1}{a^2},\ \dfrac{1}{b^2}$ được:

$$\frac{1}{a^2}=\frac{\frac{2}{9}-1}{-14}=\frac{-7}{-9.14}=\frac{1}{18};\ \frac{1}{b^2}=\frac{-7}{-14}=\frac{1}{2}$$

Phương trình (E): $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{2}=1\Rightarrow a=3\sqrt{2}$; $c=4$.

b. Gọi $M(x;y)\in(E)$

$$\left.\begin{array}{l}F_1M=3\sqrt{2}+\dfrac{4}{3\sqrt{2}}x\\ F_2M=3\sqrt{2}-\dfrac{4}{3\sqrt{2}}x\end{array}\right\}F_1M=2F_2M\Leftrightarrow 3\sqrt{2}+\frac{4}{3\sqrt{2}}x=6\sqrt{2}-\frac{8}{3\sqrt{2}}x$$

$$\Leftrightarrow\frac{12}{3\sqrt{2}}x=3\sqrt{2}\Leftrightarrow 12x=18\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\sqrt{18-x^2}=\pm\frac{1}{3}\sqrt{18-\frac{9}{4}}=\pm\frac{1}{3}.3\frac{\sqrt{7}}{2}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Các điểm cần tìm: $A\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$

Do tính đối xứng của (E) hai điểm khác cũng thỏa yêu cầu bài toán là:

$C\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$, $D\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

Bài 161. Cho phép (E) có phương trình $3x^2+4y^2-48=0$

a. Tìm tọa độ tiêu điểm, đỉnh và tính tâm sai, diện tích hình chữ nhật cơ sở của (E)

b. Tìm tọa độ giao điểm của (E) với đường thẳng d qua I(–2; 1) và có hệ số góc $k=\dfrac{1}{2}$.

c. Tìm những điểm $M\in(E)$ sao cho $\dfrac{F_1M}{F_2M}=\dfrac{3}{5}$, với F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E) $\left(x_{F_1}<x_{F_2}\right)$.

Giải

a. $3x^2 + 4y^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$

$\Rightarrow a = 4; b = 2\sqrt{3}; c = 2$

$\Rightarrow$ Tiêu điểm $F_1(-2; 0)$, $F_2(2; 0)$

Đỉnh $A_1(4; 0)$, $A_2(-4; 0)$, $B_1\left(0; 2\sqrt{3}\right)$, $B_2\left(0; -2\sqrt{3}\right)$

Tâm sai $e = \dfrac{1}{2}$

Diện tích hình chữ nhật cơ sở $4ab = 4.4.2\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$ đơn vị diện tích.

b. Phương trình d: $y = \dfrac{1}{2}(x + 2) + 1 = \dfrac{1}{2}x + 2$

Thế vào phương trình: $3x^2 + 4y^2 - 48 = 0$

$$3x^2 + 4\left(\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4\right) - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = 3 \end{array}\right.$$

(E) cắt d tại: $M(-4; 0)$, $N(2; 3)$.

c. M_c (E) thì $F_1M = 4 + \dfrac{1}{2}x$, $F_2M = 4 - \dfrac{1}{2}x$

$$\frac{F_1M}{F_2M} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5F_1M = 3F_2M \Leftrightarrow 5\left(4 + \frac{1}{2}x\right) = 3\left(4 - \frac{1}{2}x\right) \Leftrightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{4}\sqrt{16 - x^2} \Rightarrow y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{4}.\sqrt{12} = \pm 3$$

Các điểm thỏa yêu cầu bài toán: $P(-2; 3)$, $Q(-2; -3)$.

Bài 162. Cho elip (E) có tâm O, tiêu điểm F_1, F_2. Điểm $M \in (E)$ có hoành độ $x_M = -3$ và tung độ dương, với $F_1M = \sqrt{2}$, $F_2M = 5\sqrt{2}$. Tìm tung độ của M và phương trình elip (E).

Giải

Từ giả thiết: $F_1M = a + \dfrac{c}{a}(-3) = a - \dfrac{3c}{a} = \sqrt{2}$ (1)

$F_2M = a - \dfrac{c}{a}(-3) = a + \dfrac{3c}{a} = 5\sqrt{2}$ (2)

$\Rightarrow 2a = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 3\sqrt{2}$

$$(2) - (1) \Rightarrow \frac{6c}{a} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 6c = 4\sqrt{2}.3\sqrt{2} = 24 \Leftrightarrow c = 4$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{18 - 16} = \sqrt{2}$$

Phương trình elip: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$

$$x_M = -3 \Rightarrow y_M = \pm\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}.\sqrt{18 - x^2} = \pm\frac{1}{3}.3 = \pm 1$$

Bài 163. Tìm giao điểm của 2 elip:

(E_1): $x^2 + 9y^2 - 45 = 0$; (E_2): $x^2 + 9y^2 - 6x - 27 = 0$

Giải

Tọa độ các giao điểm của (E_1) và (E_2) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 45 \\ x^2 + 9y^2 - 6x = 27 \end{cases}$$

Trừ từng vế: $6x = 18 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow 9y^2 = 45 - 3^2 = 36 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$.

(E_1), (E_2) cắt nhau tại M(3; 2) và N(3; –2)

Bài 164. Tìm những điểm trên elip (E) nhìn hai tiêu điểm dưới góc α:

a. (E): $x^2 + 5y^2 = 20$; $\alpha = 90^0$

b. (E): $x^2 + 4y^2 = 4$; $\alpha = 60^0$

c. (E): $x^2 + 3y^2 - 6y - 21 = 0$; $\alpha = 90^0$

d. (E): $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$; $\alpha = 60^0$

Giải

a. (E): $x^2 + 5y^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a = 2\sqrt{5}$, $c = 4$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$ thì $F_1M = 2\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x$, $F_2M = 2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}x$

M nhìn F_1, F_2 dưới góc $90^0 \Leftrightarrow F_1M^2 + F_2M^2 = 4c^2$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2 + \left(2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow 20 + 8x + \frac{4}{5}x + 20 - 8x + \frac{4}{5}x^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{5}x^2 = 24 \Leftrightarrow x^2 = 15 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{20 - x^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5} = \pm 1$$

Các điểm cần tìm $M\left(\sqrt{15};1\right)$, $N\left(\sqrt{15};-1\right)$, $P\left(-\sqrt{15};1\right)$, $Q\left(-\sqrt{15};-1\right)$

b. (E): $x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow a = 2, b = 1,\ c = \sqrt{3}$

Gọi $M(x; y) \in (E)$ thì $F_1M = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x$; $F_2M = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$F_1F_2 = 2\sqrt{3}$

Tam giác MF_1F_2 cho: $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2.\cos 60^0$

$$\Leftrightarrow 12 = \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 - 2\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right).\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 12 = 8 + \frac{3}{2}x^2 - 4 + \frac{3}{4}x^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{32}{9}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{4}{3}\sqrt{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 - \frac{32}{9}} = \pm\frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \pm\frac{1}{3}$$

Các điểm cần tìm:

$$M\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right),\ N\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right),\ P\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right),\ Q\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right).$$

c. $x^2 + y^2 - 6y - 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3(y - 1)^2 = 24 \Leftrightarrow \frac{x^2}{24} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$

Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vec tơ $\overrightarrow{OI} = (0;1)$: $\begin{cases} x = X \\ y = 1 + Y \end{cases}$

Phương trình (E) trong hệ IXY: $\frac{X^2}{24} + \frac{Y^2}{8} = 1$

$a = 2\sqrt{6}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = 4$

$M(x; y) \in (E)$ thì $F_1M = 2\sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{6}}X$, $F_2M = 2\sqrt{6} - \frac{2}{\sqrt{6}X}$

M nhìn F_1, F_2 dưới góc $90^0 \Leftrightarrow F_1M^2 + F_2M^2 = F_1F_2^2$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{6}}X\right)^2 + \left(2\sqrt{6} - \frac{2}{\sqrt{6}}X\right)^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow 24 + 8X + \frac{2}{3}X^2 + 24 - 8X + \frac{2}{3}X^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}X^2 = 16 \Leftrightarrow X^2 = 12 \Leftrightarrow X = \pm 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow Y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{24-12} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}2\sqrt{3} = \pm 2$$

Các điểm cần tìm: $M\left(2\sqrt{3};2\right)$; $N\left(2\sqrt{3};-2\right)$, $P\left(-2\sqrt{3};2\right)$; $Q\left(-2\sqrt{3};-2\right)$

Đưa về hệ Oxy; $M\left(2\sqrt{3};3\right)$, $N\left(2\sqrt{3};-1\right)$; $P\left(-2\sqrt{3};3\right)$; $Q\left(-2\sqrt{3};-1\right)$.

d. (E): $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = 16$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vec tơ $\overrightarrow{OI} = (-2;1)$: $\begin{cases} x = -2 + X \\ y = 1 + Y \end{cases}$

Trong hệ IXY, phương trình (E): $\dfrac{X^2}{16} + \dfrac{Y^2}{4} = 1$

$\Rightarrow a = 4, b = 2; c = 2\sqrt{3}$

Gọi $M(X;\, Y) \in (E)$ thì $F_1M = 4 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}X$, $F_2M = 4 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}X$

M nhìn F1, F_2 dưới gốc $\alpha = 60^0$

$$\Leftrightarrow F_1F_2^2 = F_1M^2 + F_2M^2 - 2F_1M.F_2M.\cos 60^0$$

$$\Leftrightarrow 48 = \left(4 + \frac{\sqrt{3}}{2}X\right)^2 + \left(4 - \frac{\sqrt{3}}{2}X\right)^2 - \left(4 + \frac{\sqrt{3}}{2}X\right)\left(4 - \frac{\sqrt{3}}{2}X\right)$$

$$\Leftrightarrow 48 = 32 + \frac{3}{2}X^2 - \left(16 - \frac{3}{4}X^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}X^2 = 32 \Leftrightarrow X^2 = \frac{128}{9} \Leftrightarrow X = \pm\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$Y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{16 - \frac{128}{9}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{9}} = \pm\frac{1}{2}.\frac{4}{3} = \pm\frac{2}{3}$$

Các điểm cần tìm: $M\left(\dfrac{8\sqrt{2}}{3};\dfrac{2}{3}\right)$, $N\left(\dfrac{8\sqrt{2}}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$,

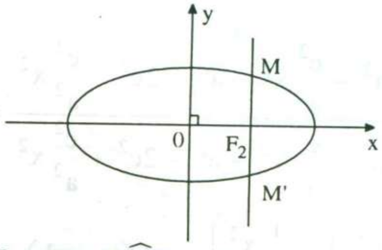
$P\left(-\dfrac{8\sqrt{3}}{2};\dfrac{2}{3}\right)$, $Q\left(-\dfrac{8\sqrt{2}}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$

Đưa về hệ Oxy: $M\left(-2+\frac{8\sqrt{3}}{2};\frac{5}{3}\right)$; $N\left(-+\frac{8\sqrt{3}}{2};\frac{1}{3}\right)$;

$P\left(-2-\frac{8\sqrt{3}}{2};\frac{5}{3}\right)$; $N\left(-1-\frac{8\sqrt{3}}{2};\frac{1}{3}\right)$.

Bài 165. Tìm độ dài dây cung của elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ đi qua tiêu điểm và vuông góc với trục lớn.

Giải



$$F_2M = a-\frac{c}{a}.(c)=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{b^2}{a}$$

$$\Rightarrow MM' = 2F_2M=\frac{2b^2}{a}$$

Bài 166. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Điểm $M\in(E)$, $F_1\widehat{M}F_2=2\alpha$.

Chứng minh $\tan\alpha \le \frac{c}{b}$ và tính tung độ điểm M theo a, b, α.

Giải

$F_1M = a+\frac{c}{a}x$, $F_2M=\left(a-\frac{c}{a}x\right)$

Từ tam giác F_1MF_2 có $F_1\widehat{M}F_2=2\alpha$

$$\cos 2\alpha=\frac{F_1M^2+F_2M^2-F_1F_2^2}{2F_1M.F_2M}=\frac{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2+\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2-4c^2}{2\left(a+\frac{c}{a}x\right)\left(a-\frac{c}{a}x\right)}$$

$$=\frac{2a^2+\frac{2c^2x^2}{a^2}-4c^2}{2\left(a^2-\frac{c^2}{a^2}x^2\right)}=\frac{a^2-2c^2+\frac{c^2}{a^2}x^2}{a^2-\frac{c^2}{a^2}x^2}$$

$$\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{1-\left(\dfrac{a^2-2c^2+\dfrac{c^2}{a^2}x^2}{a^2-\dfrac{c^2}{a^2}x^2}\right)}{1+\left(\dfrac{a^2-2c^2+\dfrac{c^2}{a^2}x^2}{a-\dfrac{c^2}{a^2}x^2}\right)}$$

$$= \frac{a^2-\dfrac{c^2}{a^2}x^2-a^2+2c^2-\dfrac{c^2}{a^2}x^2}{a^2-\dfrac{c^2}{a^2}x^2+a^2-2c^2+\dfrac{c^2}{a^2}x^2} = \frac{2\left(c^2-\dfrac{c^2}{a^2}x^2\right)}{2\left(a^2-c^2\right)}$$

$$= \frac{c^2\left(1-\dfrac{1}{a^2}x^2\right)}{a^2-c^2} = \frac{c^2}{b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \le \frac{c^2}{b^2} \Rightarrow \tan\alpha \le \frac{c}{b}$$

Từ $\tan^2\alpha = \dfrac{c^2}{b^2}\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right) \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{b^2.\tan^2\alpha}{c^2} \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{b^4\tan^2\alpha}{c^2}$

$\Leftrightarrow y = \pm\dfrac{b^2\tan\alpha}{c}$.

Bài 167. Cho hai elip (E_1):

$A_1x^2 + B_1y^2 = 1$, (E_2): $A_2x^2 + B_2y^2 = 1$ với $B_2 > B_1 > 0$, $A_1 > A_2 > 0$.

Chứng minh (E_1) cắt (E_2) tại 4 điểm nằm trên một đường tròn. Viết phương trình của đường tròn đó.

Giải

Tọa độ các giao điểm của (E_1) và (E_2) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} A_1x^2 + B_1y^2 = 1 \\ A_2x^2 + B_2y^2 = 1 \end{cases}$$

Với điều kiện $A_1B_2 - A_2B_1 \ne 0$, hệ có nghiệm:

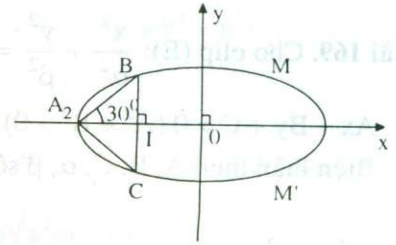
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{B_2 - B_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \\ y^2 = \dfrac{A_1 - A_2}{A_1B_2 - A_2B_1} \end{cases} \quad \text{(Thêm điều kiện } A_1B_2 > A_2B_1\text{)}$$

Cộng từng vế: $x^2 + y^2 = \dfrac{(B_2 - B_1) + (A_1 - A_2)}{A_1B_2 - A_2B_1}$: đây là phương trình đường tròn tâm O(0; 0) bán kính $R = \sqrt{\dfrac{B_2 - B_1 + A_1 - A_2}{A_1B_2 - A_2B_1}}$.

Bài 168. A_2 là đỉnh trên trục lớn của elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Một tam giác đều nội tiếp trong elip có một đỉnh là A_2. Tìm tọa độ hai đỉnh kia.

Giải

Xem hình bên



Gọi $A_2(-a; 0)$. Nếu A_2BC là tam giác đều nội tiếp elip thì B, C đối xứng nhau qua trục lớn và $\widehat{BA_2I} = 30^0$. Hệ số góc của đường thẳng A_2B là $k = \tan 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Phương trình đường thẳng A_2B : $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x + a)$

Thế vào phương trình (E): $b^2x^2 + a^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x + a)\right)^2 - a^2b^2 = 0$

$$\Leftrightarrow b^2x^2 + \frac{a^2(x^2 + 2ax + a^2)}{3} - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3b^2x^2 + a^2x^2 + 2a^3x + a^4 - 3a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3b^2 + a^2)x^2 + 2a^3x + a^4 - 3a^2b^2 = 0$$

$$\Delta' = a^6 - (3b^2 + a^2)(a^4 - 3a^2b^2) = a^6 - a^2(a^2 + 3b^2)(a^2 - 3b^2)$$

$$= a^6 - a^2(a^4 - 9b^4) = 9a^2b^4 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 3ab^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-a^3 - 3ab^2}{3b^2 + a^2} = -a \text{ (loại, vì đây là hoành độ đỉnh } A_2) \\ x_2 = \dfrac{-a^3 + 3ab^2}{3b^2 + a^2} = \dfrac{a(3b^2 - a^2)}{3b^2 + a^2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow y_2 = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \left[\frac{a(3b^2 - a^2)}{3b^2 + a^2}\right]^2} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2(3b^2 + a^2)^2 - a^2(3b^2 - a^2)^2}{(3b^2 + a^2)^2}}$$

$$= \pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2\left[3b^2 + a^2 + 3b^2 - a^2\right]\left[3b^2 + a^2 - 3b^2 + a^2\right]}{\left(3b^2 + a^2\right)}} = \pm\frac{b}{a}\frac{\sqrt{a^2.6b^2.2a^2}}{3b^2 + a^2}$$

$$= \pm\frac{2\sqrt{3}ab^2}{3b^2 + a^2}.$$

Hai đỉnh kia của tam giác đều ABC:

$$B\left(\frac{a(a^2 - 3b^2)}{a^2 + 3b^2};\frac{2a\sqrt{3}b^2}{a^2 + 3b^2}\right),\ C\left(\frac{a\left(a^2 - 3b^2\right)}{a^2 + 3b^2};\frac{-2a\sqrt{3}b^2}{a^2 + 3b^2}\right).$$

Bài 169. Cho elip (E): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ $(\alpha, \beta > 0, \alpha \neq \beta)$ và đường thẳng d:

$Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 > 0)$.

Biện luận theo A, B, C, α, β số giao điểm của d và (E).

Giải

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2x^2 + \alpha^2y^2 - \alpha^2\beta^2 = 0 \qquad (*)$$

Từ $Ax + By + C = 0$, thế $y = \frac{-Ax - C}{B}$ $(B \neq 0)$ vào (*):

$$\beta^2x^2 + \alpha^2\left(\frac{-Ax - C}{B}\right)^2 - \alpha^2\beta^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta^2x^2 + \frac{\alpha^2\left(A^2x^2 + 2AC + C^2\right)}{B^2} - \alpha^2\beta^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(B^2\beta^2 + A^2\alpha^2\right)x^2 + 2AC\alpha^2x + \alpha^2C^2 - \alpha^2\beta^2B^2 = 0$$

$$\Delta' = A^2C^2\alpha^4 - \left(B^2\beta^2 + A^2\alpha^2\right)\left(\alpha^2C^2 - \alpha^2\beta^2B^2\right)$$

$$= A^2C^2\alpha^4 - \alpha^2\beta^2B^2C^2 - A^2C^2\alpha^4 + \alpha^2\beta^4B^4 + \alpha^4\beta^2A^2B^2$$

$$= \alpha^2\beta^2B^2\left(\beta^2B^2 + \alpha^2A^2 - C^2\right).$$

- Nếu $\beta^2B^2 + \alpha^2A^2 < C^2$: (d) không cắt (E).
- Nếu $\beta^2B^2 + \alpha^2A^2 = C^2$: (d) tiếp xúc (E).
- Nếu $\beta^2B^2 + \alpha^2A^2 > C^2$: (d) và (E) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Bài 170. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng d: y = mx + n cắt (E) tại P, Q.

a. Tính độ dài đoạn PQ theo a, b, m, n.

b. Viết phương trình đường tròn đường kính PQ.

Giải

a. Thế y = mx + n vào phương trình (E):

$$b^2x^2 + a^2(mx+n)^2 - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Delta' = a^4m^2n^2 - (a^2m^2 + b^2)(a^2n^2 - a^2b^2)$$

$$= a^4m^2n^2 - a^4m^2n^2 - a^2b^2n^2 + a^4m^2b^2 + a^2b^4 = a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - n^2)$$

$$\sqrt{\Delta'} = ab\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}$$

$$\Rightarrow x_Q - x_P = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{a^2m^2 + b^2} = \frac{2ba\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{a^2m^2 + b^2} \Rightarrow y_Q - y_P = m(x_Q - x_P)$$

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + \left[m(x_Q - x_P)\right]^2} = \frac{2ab\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{a^2m^2 + b^2}.\sqrt{1 + m^2}$$

b. Gọi I là trung điểm PQ: $I\left(\dfrac{-a^2mn}{a^2m^2 + b^2}; \dfrac{-a^2mn}{a^2m^2 + b^2}.m + n\right)$

Phương trình đường tròn đường kính PQ:

$$\left(x + \frac{a^2mx}{a^2m^2 + b^2}\right) + \left(y + \frac{a^2m^2n}{a^2m^2 + b^2} - n\right)^2 = \frac{a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - n^2)(1 + m^2)}{(a^2m^2 + b^2)^2}$$

Bài 171. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Tìm tọa độ đỉnh của hình chữ nhật nội tiếp elip và các cạnh song song với hai trục có diện tích lớn nhất.

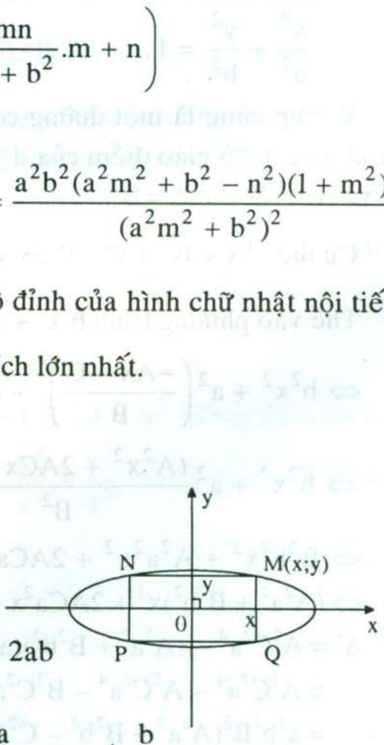
Giải

Xem hình chữ nhật MNPQ nội tiếp elip:

Nếu M(x; y) ∈ (E) thì:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, MN = 2x, MQ = 2y.

$$S_{MNPQ} = 4xy = 2ab.\frac{2xy}{ab} \le 2ab\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 2ab$$



$\Rightarrow S_{MNPQ}$ max khi $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ y = \pm\dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

$$\Rightarrow M\left(\frac{a}{\sqrt{2}};\frac{b}{\sqrt{2}}\right), N\left(-\frac{a}{\sqrt{2}};\frac{b}{\sqrt{2}}\right), P\left(-\frac{a}{\sqrt{2}};-\frac{b}{\sqrt{2}}\right), Q\left(\frac{a}{\sqrt{2}};-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

* Lưu ý quan trọng khi giải bài tập về tiếp tuyến của elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

+ Từ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{2x}{a^2}+\frac{2y.y'}{b^2}=0 \Leftrightarrow \frac{y.y'}{b^2}=\frac{-x}{a^2}$

$$\Rightarrow y'=\frac{-b^2x}{a^2y} \Rightarrow y'_{x_0}=\frac{-b^2.x_0}{a^2.y_0}$$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0) \in (E)$:

$$y'=y'_{x_0}(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=\frac{-b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)+y_0$$

$$\Leftrightarrow a^2.y.y_0=-b^2x.x_0+b^2x_0^2+a^2y_0^2 \Leftrightarrow b^2x.x_0+a^2y.y_0=a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x.x_0}{a^2}+\frac{y.y_0}{b^2}=1.$$

+ Điều kiện để đường thẳng $Ax+By+C=0$ (d) là tiếp tuyến của elip (E):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Vì elip cũng là một đường cong bậc hai như parabol, nên có thể xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (E) (hoặc phương trình tung độ giao điểm của d và (E)) rồi cho $\Delta = 0$

Cụ thể: $Ax+By+C=0 \Leftrightarrow y=\frac{-Ax-C}{B}$ $(B \neq 0)$

Thế vào phương trình $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$

$$\Leftrightarrow b^2x^2+a^2\left(\frac{-Ax-C}{B}\right)^2-a^2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2+a^2\frac{(A^2x^2+2ACx+C^2)}{B^2}-a^2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow B^2b^2x^2+A^2a^2x^2+2ACa^2x+a^2C^2-B^2a^2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (A^2a^2+B^2b^2)x^2+2ACa^2x+a^2C^2-B^2a^2b^2=0$$

$$\Delta' = A^2C^2a^4-(A^2a^2+B^2b^2)(a^2C^2-B^2a^2b^2)$$

$$= A^2C^2a^4-A^2C^2a^4-B^2C^2a^2b^2+A^2B^2a^4b^2+B^4b^4a^2$$

$$= a^2b^2B^2(A^2a^2+B^2b^2-C^2)$$

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow A^2a^2+B^2b^2=C^2$: đây là điều kiện cần và đủ để đường thẳng

$Ax + By + C = 0$ tiếp xúc elip: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Bài 172. Lập phương trình tiếp tuyến với elip (E): $x^2 + 4y^2 = 25$ tại các giao điểm của (E) với đường thẳng $x + 2y - 7 = 0$ (d).

Giải

Thế $x = 7 - 2y$ từ phương trình của d vào phương trình (E):

$$(7 - 2y)^2 + 4y^2 = 25 \Leftrightarrow 8y^2 - 28y + 24 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 7y + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = 4 \\ y = 2 \Rightarrow x = 3 \end{array}\right.$$

d và (E) cắt nhau tại $A\left(4; \dfrac{3}{2}\right)$, $B(3; 2)$

- Tại $A\left(4; \dfrac{3}{2}\right)$ có tiếp tuyến (T_1): $4x + 4.\dfrac{3}{2}y - 25 = 0 \Leftrightarrow 4x + 6y - 25 = 0$
- Tại $B(3; 2)$ có tiếp tuyến (T_2): $3x + 4.2y - 25 = 0 \Leftrightarrow 3x + 8y - 25 = 0$.

Bài 173. Lập phương trình tiếp tuyến của elip:

a. (E) $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ biết tiếp tuyến có hệ số góc là 2.

b. (E): $8x^2 + 17y^2 - 136 = 0$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $x - y = 0$.

c. (E): $x^2 + 4y^2 = 40$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $2x - 3y + 1 = 0$.

d. (E): $x^2 + 4y^2 = 20$ biết tiếp tuyến hợp với trục hoành góc 45^0.

e. (E): $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ biết tiếp tuyến hợp với đường thẳng d: $3x + y - 16 = 0$ một góc 45^0.

Giải

a. Gọi d là đường thẳng có dạng $y = 2x + m \Leftrightarrow 2x - y + m = 0$.

d là tiếp tuyến của (E) khi và chỉ khi $2^2.8 + (-1)^2.4 = m^2$ (dùng điều kiện tiếp xúc của đường thẳng $Ax + By + C = 0$ và elip: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ là $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$).

$\Leftrightarrow m^2 = 36 \Leftrightarrow m = \pm 6$

Các tiếp tuyến cần tìm: $2x - y + 6 = 0$, $2x - y - 6 = 0$.

b. (E): $8x^2 + 17y^2 - 136 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{17} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ $(a^2 = 17, b^2 = 8)$

Đường thẳng phải tìm có dạng: $x - y + C = 0$.

Để đường thẳng có dạng $x - y + C = 0$ là tiếp tuyến của (E) thì $1^2.17 + (-1)^2.8 = C^2$

$\Leftrightarrow C^2 = 25 \Leftrightarrow C = \pm 5$.

Hai tiếp tuyến yêu cầu bài toán là $x - y + 5 = 0$ và $x - y - 5 = 0$.

c. (E): $x^2 + 4y^2 = 40 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{30} + \dfrac{y^2}{10} = 1$ $(a^2 = 40; b^2 = 10)$

Phương trình đường thẳng vuông góc với đường thẳng $2x - 3y + 1 = 0$ có dạng: $3x + 2y + C = 0$. Để đường thẳng này là tiếp tuyến của (E) thì:

$3^2.40 + 2^2.10 = C^2 \Leftrightarrow C^2 = 400 \Leftrightarrow C = \pm 20$

Các tiếp tuyến cần tìm: $3x + 2y + 20 = 0$, $3x + 2y - 20 = 0$.

d. (E): $x^2 + 4y^2 = 20 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ $(a^2 = 20, b^2 = 5)$

Các đường thẳng tạo với trục hoành góc 45^0 có dạng $y = x + m$ hoặc:

$y = -x + m \Leftrightarrow x - y + m = 0$ hay $x + y + m = 0$

Để trở thành các tiếp tuyến của (E) thì: $1^2.20 + (\pm 1)^2 5 = m^2 \Leftrightarrow m = \pm 5$

Các tiếp tuyến của (E) hợp với trục Ox góc 45^0:

$x - y + 5 = 0$, $x - y - 5 = 0$, $x + y + 5 = 0$, $x + y - 5 = 0$.

e. (E): $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ $(a^2 = 9, b^2 = 4)$

Gọi d' là đường thẳng: $kx - y + m = 0$, d' có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{d'} = (1; k)$

d: $3x + y - 16 = 0$ có vectơ chỉ phương $\vec{d} = (-1;3)$

$$\cos(d',d) = \frac{|3k - 1|}{\sqrt{1 - k^2}.\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|3k - 1|}{\sqrt{10}.\sqrt{1 + k^2}}$$

Theo yêu cầu bài toán thì: $\dfrac{|3k - 1|}{\sqrt{10}.\sqrt{1 + k^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |3k - 1| = \sqrt{5}.\sqrt{1 + k^2}$

$$\Leftrightarrow 9k^2 - 6k + 1 = 5 + 5k^2 \Leftrightarrow 4k^2 - 6k - 4 = 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 3k - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

- Với $k = 2$: d' có dạng $2x - y + m = 0$

  d' tiếp xúc (E) $\Leftrightarrow 2^2.9 + (-1)^2.4 = m^2 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{10}$

  Có hai đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán:

  $2x - y + 2\sqrt{10} = 0$, $2x - y - 2\sqrt{10} = 0$

- Với $k = -\dfrac{1}{2}$: d' có dạng $-\dfrac{1}{2}x - y + m = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2m = 0$

  d' tiếp xúc (E) $\Leftrightarrow 1^2.9 + (2)^2.4 = 4m^2 \Leftrightarrow m^2 - \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{5}{2}$

Có hai đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán: $x + 2y + 5 = 0$, $x + 2y - 5 = 0$.

Bài 174. Đường thẳng $Ax + By + C = 0$ (d) tiếp xúc elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tìm tọa độ tiếp điểm theo A, B, C, a, b.

Giải

Thế $y = \frac{-Ax - C}{B}$ vào phương trình (E): $b^2x^2 + a^2\left(\frac{-Ax - C}{B}\right)^2 - a^2b^2 = 0$

$\Leftrightarrow (A^2a^2 + B^2b^2)x^2 = 2AC.a^2x + a^2C^2 - a^2b^2B^2 = 0$

Với điều kiện $A^2a^2 + B^2b^2 + C^2$ thì d tiếp xúc (E), khi đó nghiệm kép là hoành độ tiếp điểm.

$$x = \frac{-ACa^2}{A^2a^2 + B^2b^2} = \frac{-AC.a^2}{C^2} = \frac{-Aa^2}{C}$$

Tung độ tiếp điểm: $y = \frac{-A\left(\frac{-Aa^2}{C}\right) - C}{B} = \frac{A^2a^2 - C^2}{BC} = \frac{-B^2b^2}{BC} = \frac{-Bb^2}{C}$

Tọa độ tiếp điểm: $M\left(\frac{-Aa^2}{C}; \frac{-Bb^2}{C}\right)$.

Bài 175. Viết phương trình tiếp tuyến của elip:

a. (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ xuất phát từ $M\left(0; \frac{5}{2}\right)$.

b. (E): $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ xuất phát từ $M\left(4; \frac{3}{2}\right)$. Tìm tọa độ tiếp điểm.

c. (E): $5x^2 + 18y^2 - 90 = 0$ biết khoảng cách từ tâm của (E) đến tiếp tuyến bằng 3.

Giải

a. Tại $A(x_0; y_0)$ có tiếp tuyến $\frac{x_0x}{25} + \frac{y_0y}{4} - 1 = 0$

Tiếp tuyến này qua $M\left(0; \frac{5}{2}\right)$: $\frac{x_0.0}{25} + \frac{y_0 \cdot \frac{5}{2}}{4} = 1 \Leftrightarrow y_0 = \frac{8}{5}$

$$\Rightarrow x_0^2 = \frac{25}{4}\left(4 - y_0^2\right) = \frac{25}{4}\left(4 - \frac{64}{25}\right) = \frac{25}{4}.\frac{36}{25} = 9 \Leftrightarrow x_0 = \pm 3$$

Các tiếp tuyến cần tìm:

$$\frac{3x}{25} + \frac{8y}{4.5} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{25} + \frac{2y}{5} - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow 3x + 10y - 25 = 0$

$$\frac{-3x}{25}+\frac{8y}{4.5}-1=0 \Leftrightarrow \frac{-3x}{25}+\frac{2y}{5}-1=0 \Leftrightarrow 3x-10y+25=0.$$

b. (E): $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$

Tại $A(x_0; y_0)$, tiếp tuyến của (E) có phương trình $9x_0x + 16y_0y - 144 = 0$.

Tiếp tuyến qua $M\left(4;\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow 9x_0.4 + 16y_0.\frac{3}{2} - 144 = 0$

$\Leftrightarrow 3x_0 + 2y_0 - 12 = 0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{12-3x_0}{2}$

Thế vào $9x_0^2 + 16y_0^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow 9x_0^2 + 16.\left(\frac{12-3x_0}{2}\right)^2 - 144 = 0$

$\Leftrightarrow 9x_0^2 + 4(144 - 72x_0 + 9x_0^2) - 144 = 0$

$$\Leftrightarrow 45x_0^2 - 288x_0 + 432 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \frac{12}{5} \Rightarrow y_0 = \frac{12}{5} \\ x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right.$$

Có hai tiếp tuyến của elip xuất phát từ $M\left(4;\frac{3}{2}\right)$

(T_1): $9.\frac{12}{5}x + 16.\frac{12}{5}y - 144 = 0 \Leftrightarrow 9x + 16y - 60 = 0$

(T_2): $9.4x + 16.0.y - 144 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0.$

c. (E): $5x^2 + 18y^2 - 90 = 0$

Tại $M_0(x_0; y_0) \in (E)$, tiếp tuyến có phương trình: $5x_0x + 18y_0y - 90 = 0$ (T)

Từ giả thiết $d(0; (T)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-90|}{\sqrt{25x_0^2 + 324y_0^2}} = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{25x_0^2 + 324y_0^2} = 30 \Leftrightarrow 25x_0^2 + 324y_0^2 = 900$

x_0, y_0 là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 5x_0^2 + 18y_0^2 = 90 \\ 25x_0^2 + 324y_0^2 = 900 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = \frac{12960}{1170} = \frac{144}{130} = \frac{72}{65} \\ y_0^2 = \frac{2250}{1170} = \frac{25}{130} = \frac{5}{26} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \pm\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{65}} \\ y_0 = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{26}} \end{cases}$$

- Tại $\left(\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{65}};\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{26}}\right)$ có tiếp tuyến $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{65}}x+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{26}}y-90=0$.
- Tại $\left(\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{65}};\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{26}}\right)$ có tiếp tuyến $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{65}}x-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{26}}y-90=0$.
- Tại $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{\sqrt{65}};\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{26}}\right)$ có tiếp tuyến $\frac{-6\sqrt{2}}{\sqrt{65}}x+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{26}}y-90=0$.
- Tại $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{\sqrt{65}};\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{26}}\right)$ có tiếp tuyến $\frac{-6\sqrt{2}}{\sqrt{65}}x-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{26}}y-90=0$.

Bài 176. Từ điểm $M(x_1;\,y_1)$ kẻ hai tiếp tuyến đến elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Tìm phương trình đường thẳng qua hai tiếp điểm.

Giải

Gọi $A(x_A;\,y_A)$, $B(x_B;\,y_B)$ là hai điểm thuộc (E)

Tiếp tuyến của (E) tại A: $\frac{x.x_A}{a^2}+\frac{y.y_A}{b^2}-1=0$ (T_1)

Tiếp tuyến của (E) tại B: $\frac{x.x_B}{a^2}+\frac{y.y_B}{b^2}-1=0$ (T_2)

(T_1) qua $M(x_1;\,y_1) \Leftrightarrow \frac{x_1.x_A}{a^2}+\frac{y_1y_A}{b^2}-1=0$

(T_2) qua $M(x_1;\,y_1) \Leftrightarrow \frac{x_1x_B}{a^2}+\frac{y_1y_B}{b^2}-1=0$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng AB: $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}-1=0$.

Bài 177. Viết phương trình tiếp tuyến với elip:

a. (E): $\frac{(x+1)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $2x+y-3=0$. Tìm tọa độ tiếp điểm.

b. (E): $16x^2+25y^2-32x+150y-159=0$ biết tiếp tuyến đi qua A(1; 2).

Giải

a. Đường thẳng vuông góc đường thẳng $2x+y-3=0$ có dạng $x-2y+C=0$

(E): $\frac{(x+1)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$. Tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}=(-1;2)$ theo phép tịnh tiến $\begin{cases}x=-1+X\\y=2+Y\end{cases}$ trên thành elip: $\frac{X^2}{5}+\frac{Y^2}{1}-1=0$ (E)

Trong hệ IXY, đường thẳng $x - 2y + C = 0$ trở thành:

$(-1 + X) - 2(2 + Y) + C = 0 \Leftrightarrow X - 2Y + C - 5 = 0$

Tiếp xúc (E) $\Leftrightarrow 1^2.5 + (-2)^2.1 = (C - 5)^2 \Leftrightarrow (C - 5)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C - 5 = 3 \\ C - 5 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 8 \\ C = 2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến của (E) trong hệ IXY:

(T_1): $x - 2y + 3 = 0$, (T_2): $X - 2Y - 3 = 0$

Đưa về hệ Oxy: $(x + 1) - 2(y - 2) + 3 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 8 = 0 \quad (T_1)$

$(x + 1) - 2(y - 2) - 3 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2 = 0 \quad (T_2)$

b. (E): $16x^2 + 25y^2 - 32x + 150y - 159 = 0$

$\Leftrightarrow 16(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 + 6y + 9) = 159 + 16 + 225$

$$\Leftrightarrow 16(x - 1)^2 + 25(y + 3)^2 = 400 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y + 3)^2}{16} = 1$$

Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vec tơ $\overrightarrow{OI} = (1; -3)$: $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = -3 + Y \end{cases}$

Phương trình (E) trong hệ IXY: $\dfrac{X^2}{25} + \dfrac{Y^2}{16} = 1$

Trong hệ IXY: $A(1; 2) \Rightarrow A(0; 5)$ là một đỉnh của (E) tại A chỉ có một tiếp tuyến $X - 5 = 0$

Trong hệ Oxy: $(x - 1) - 5 = 0$: $x - 6 = 0$.

Bài 178. Viết phương trình tiếp tuyến chung của các elip:

a. (E_1): $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$; (E_2): $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

b. (E_1): $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{1} = 1$; (E_2): $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Lưu ý: Thông thường một elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ có $a > b$. Trong thực tế, người ta cũng gặp những elip $\dfrac{x^2}{m^2} + \dfrac{y^2}{n^2} = 1$ mà $m < n$.

Giải

a. (E_1): $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, (E_2): $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

Gọi $Ax + By + C = 0$ là một tiếp tuyến chung của (E_1) và (E_2):

Như thế thì: $\begin{cases} A^2.5 + B^2.4 = C^2 & (1) \\ A^2.4 + B^2.5 = C^2 & (2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^2 = \dfrac{C^2}{9} \\ B^2 = \dfrac{C^2}{9} \end{cases} \text{ chọn } C = \pm 3 \text{ thì } \begin{cases} A = \pm 1 \\ B = \pm 1 \end{cases}$$

Các tiếp tuyến chung:

$A = 1, B = 1, C = 3$; $\quad x + y + 3 = 0$

$A = 1, B = 1, C = -3$; $\quad x + y - 3 = 0$

$A = 1, B = -1, C = 3$; $\quad x - y + 3 = 0$

$A = 1, B = -1, C = -3$; $\quad x - y - 3 = 0$

b. (E_1): $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{1} = 1$; $\quad (E_2)$: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Gọi $Ax + By + C = 0$ là một tiếp tuyến chung của (E_1) và (E_2)

$$\Rightarrow \begin{cases} A^2.6 + B^2.1 = C^2 \\ A^2.4 + B^2.9 = C^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 = \dfrac{8C^2}{50} = \dfrac{4C^2}{25} \\ B^2 = \dfrac{2C^2}{50} = \dfrac{C^2}{25} \end{cases}$$

Chọn $C^2 = 25$: $A^2 = 4 \Rightarrow A = \pm 2$

$B^2 = 1 \Rightarrow B = \pm 1$

$\Rightarrow C = \pm 5$.

Các tiếp tuyến chung của (E_1) và (E_2)

$2x + y + 5 = 0$; $\quad 2x + y - 5 = 0$

$2x - y + 5 = 0$; $\quad 2x - y - 5 = 0$

Bài 179. Từ điểm $I(-6; 5)$ ta vẽ được hai tiếp tuyến với elip (E): $x^2 + 3y^2 = 12$

Hãy viết phương trình đường tròn tâm I tiếp xúc với đường thẳng qua hai tiếp điểm của (E).

Giải

Gọi $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$ là hai điểm thuộc (E)

Phương trình tiếp tuyến (T_1) của (E) tại M: $x.x_M + 3y.y_M - 12 = 0$

Phương trình tiếp tuyến (T_2) của (E) tại N: $x.x_N + 3y.y_N - 12 = 0$

$I \in (T_1) \Leftrightarrow -6x_M + 15y_M - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x_M - 5y_M + 4 = 0$

$I \in (T_2) \Leftrightarrow -6x_N + 15x_N - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x_N - 5y_N + 4 = 0$

Tọa độ M và N đều thỏa chung một phương trình $2x - 5y + 4 = 0$: đây là phương trình đường thẳng MN.

$$d(I;MN) = \frac{|2.(-6) - 5.5 + 4|}{\sqrt{4} + 25} = \frac{35}{\sqrt{29}}$$

Phương trình đường tròn cần tìm: $(x + 6)^2 + (y - 5)^2 = \dfrac{1225}{29}$.

Bài 180. Tìm phương trình của elip (E) có:

a. Tâm O, một đỉnh trên trục nhỏ là (0; −2) và elip tiếp xúc với đường thẳng $x + y - 3 = 0$.

b. Trục lớn nằm trên Ox, tâm O, tiêu cự $2\sqrt{3}$, elip tiếp xúc đường thẳng d: $x - y - 3 = 0$.

c. Hai trục đối xứng là Ox, Oy, elip tiếp xúc với hai đường thẳng:

$$3x - 2y - 20 = 0,\ \ x + 6y - 20 = 0$$

Giải

a. Từ giả thiết một đỉnh trên trục nhỏ là $(0; -2) \Rightarrow b = 2$

(E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ tiếp xúc với d: $x + y - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 1^2.a^2 + 1^2.2^2 = 9 \Leftrightarrow a^2 = 5 \Rightarrow$ Phương trình (E): $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

b. Tiêu cự $2c = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow c = \sqrt{3} \Rightarrow b^2 = a^2 - 3 (a > \sqrt{3})$

Phương trình (E) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - 3} = 1$

(E) tiếp xúc d: $x - y - 3 = 0$

$\Leftrightarrow a^2.1^2 + (-1)^2.(a^2 - 3) = 9 \Leftrightarrow 2a^2 = 12 \Leftrightarrow a^2 = 6 \Rightarrow b^2 = 3$

Phương trình (E): $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

c. Phương trình (E) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(E) tiếp xúc $3x - 2y - 20 = 0 \Leftrightarrow 3^2.a^2 + (-2)^2.b^2 = 20^2 \Leftrightarrow 9a^2 + 4b^2 = 400$ (1)

(E) tiếp xúc $x + 6y - 20 = 0 \Leftrightarrow 1^2.a^2 + 6^2.b^2 = 400 \Leftrightarrow a^2 + 36b^2 = 400$ (2).

Hệ phương trình (1) và (2) cho $a^2 = 40, b^2 = 10$

Phương trình (E): $\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{10} = 1$.

Bài 181. Cho số thực $m \neq 0$, chứng minh khi φ thay đổi, đường thẳng $x.\cos\varphi + y.\sin\varphi - \sqrt{m^2 + \cos^2\varphi} = 0$ luôn tiếp xúc với một elip (E) cố định. Xác định độ dài hai trục và tiêu điểm của (E).

Giải

Giả sử elip (E) có phương trình: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(E) tiếp xúc với đường thẳng $x.\cos\varphi + y.\sin\varphi - \sqrt{m^2 + \cos^2\varphi} = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2\varphi.a^2 + \sin^2\varphi.b^2 = m^2 + \cos^2\varphi$

$\Leftrightarrow \cos^2\varphi(a^2 - 1) + \sin^2\varphi.b^2 = m^2$

$\Leftrightarrow \cos^2\varphi(a^2 - 1) + \sin^2\varphi.b^2 = m^2 = m^2\cos^2\varphi + m^2\sin^2\varphi$

$\Leftrightarrow \cos^2\varphi(a^2 - 1 - m^2) + \sin^2\varphi(b^2 - m^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 + m^2 \\ b^2 = m^2 \end{cases}$

Kết luận: các đường thẳng $x\cos\varphi + y\sin\varphi - \sqrt{m^2 + \cos^2\varphi} = 0$ luôn luôn tiếp xúc với elip (E): $\dfrac{x^2}{1+m^2} + \dfrac{y^2}{m^2} = 1$.

(E) có trục lớn $2a = 2\sqrt{1 + m^2}$, trục nhỏ $2b = 2m$

$c^2 = 1 + m^2 - m^2 = 1 \Leftrightarrow c = 1$

Tiêu điểm $F_1(-1; 0)$, $F_2(1; 0)$.

Bài 182. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, d là một tiếp tuyến của (E) tại $M(x_0; y_0) \in (E)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với d tại M gọi là pháp tuyến của (E) tại M.

a. Viết phương trình pháp tuyến của (E) tại $M(x_0; y_0)$.

b. Chứng minh đường thẳng $Ax + By + C = 0$ là một pháp tuyến của (E) khi và chỉ khi: $\left[\begin{array}{l} A = C = 0 \\ B = C = 0 \\ \dfrac{a^2}{A^2} + \dfrac{b^2}{B^2} = \dfrac{c^4}{C^4} \;\; (c^2 = a^2 - b^2) \end{array}\right.$

Giải

a. (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

Phương trình tiếp tuyến (T) tại $M(x_0; y_0) \in (E)$:

$b^2.x.x_0 + a^2.y.y_0 - a^2.b^2 = 0$ ($b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$)

Phương trình pháp tuyến của (E) tại $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$a^2y_0.x - b^2x_0.y + C = 0$

Pháp tuyến qua $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow a^2y_0.x_0 - b^2x_0y_0 + C = 0$

$$\Leftrightarrow C = -x_0y_0(a^2 - b^2)$$

$\Rightarrow$ Phương trình pháp tuyến: $a^2y_0x - b^2x_0y - x_0y_0(a^2 - b^2) = 0$

$$\Leftrightarrow a^2y_0x - b^2x_0y - c^2.x_0y_0 = 0 \qquad (*)$$

b. Qua $M(x_0; y_0) \in (E)$ chỉ có một pháp tuyến $Ax + By + C = 0$

Đồng nhất với (p): $\begin{cases} A = a^2y_0 \\ B = -b^2x_0 \\ C = c^2x_0y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A}{a^2} = y_0 \\ \dfrac{B}{-b^2} = x_0 \\ \dfrac{C}{c^2} = x_0y_0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A^2}{a^4} = y_0^2 \\ \dfrac{B}{b^4} = x_0^2 \\ \dfrac{C^2}{c^4} = x_0^2y_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A^2}{a^2} = a^2y_0^2 \\ \dfrac{B^2}{b^2} = b^2x_0^2 \\ \dfrac{C^2}{c^4} = \dfrac{1}{x_0^2y_0^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a^2}{A^2} = \dfrac{1}{a^2y_0^2} \\ \dfrac{b^2}{B^2} = \dfrac{1}{b^2x_0^2} \\ \dfrac{c^4}{C^2} = \dfrac{1}{x_0^2y_0^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} = \frac{1}{a^2y_0^2} + \frac{1}{b^2x_0^2} = \frac{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}{a^2b^2.x_0^2.y_0^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2.x_0^2y_0^2} = \frac{c^4}{C^2}$$

Kết luận: $Ax + By + C = 0$ là một pháp tuyến của (E) khi và chỉ khi:

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} = \frac{c^4}{C^2} \quad (c^2 = a^2 - b^2).$$

Đặc biệt:
- $A = C = 0$: pháp tuyến (tại hai đỉnh thuộc trục lớn) là $y = 0$.
- $B = C = 0$: pháp tuyến (tại hai đỉnh thuộc trục nhỏ) là $x = 0$.

Bài 183. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$. Từ điểm M(3; 2) kẽ hai tiếp tuyến đến (E), tiếp xúc với (E) tại P, Q. Viết phương trình đường tròn (MPQ).

Giải

(E): $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 - 2 = 0.$

Gọi $P(x_0; y_0)$ thì phương trình tiếp tuyến của (E) tại P là: $x_0x + 2y_0y - 2 = 0$.

Tiếp tuyến này qua $M(3; 2) \Leftrightarrow 3x_0 + 4y_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow y_0 = \dfrac{2 - 3x_0}{4}$.

$P(x_0; y_0) \in (E) \Leftrightarrow x_0^2 + 2y_0^2 - 2 = 0$.

Thế $y_0 = \dfrac{2 - 3x_0}{4} \Rightarrow x_0^2 + 2\left(\dfrac{2 - 3x_0}{4}\right)^2 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + \frac{9x_0^2 - 12x_0 + 4}{8} - 2 = 0 \Leftrightarrow 17x_0^2 - 12x_0 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{6 - 4\sqrt{15}}{17} \Rightarrow y_0 = \dfrac{4 + 3\sqrt{15}}{17} \\ x_0 = \dfrac{6 + 4\sqrt{15}}{17} \Rightarrow y_0 = \dfrac{4 - 3\sqrt{15}}{17} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Tọa độ các tiếp điểm P, Q:

$$P\left(\frac{6 - 4\sqrt{15}}{17}; \frac{4 + 3\sqrt{15}}{17}\right),\ Q\left(\frac{6 + 4\sqrt{15}}{17}; \frac{4 - 3\sqrt{15}}{17}\right).$$

Tâm ω của đường tròn MPQ là giao điểm của hai đường trung trực của PQ và MP.

- Gọi I là trung điểm của PQ thì $I\left(\dfrac{6}{17}; \dfrac{4}{17}\right)$

$\overrightarrow{PQ} = \left(\dfrac{8\sqrt{15}}{17}; \dfrac{-6\sqrt{15}}{17}\right)$ cùng phương với $\vec{a} = (4; -3)$, vuông góc với vectơ $\vec{n} = (3; 4)$. Chọn $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến của đường trung trực của PQ.

Phương trình đường trung trực của PQ có dạng $3x + 4y + C = 0$, PQ qua I

$$\Leftrightarrow 3.\frac{6}{17} + 4.\frac{4}{17} + C = 0 \Leftrightarrow 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2.$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường trung trực của đoạn thẳng PQ: $3x + 4y - 2 = 0$.

- Gọi K là trung điểm MP:

$K\left(\dfrac{57 - 4\sqrt{15}}{34}; \dfrac{38 + 3\sqrt{15}}{34}\right)$, $\overrightarrow{MP} = \left(\dfrac{-45 - 4\sqrt{15}}{17}; \dfrac{-30 + 3\sqrt{15}}{17}\right)$ cùng phương với $\vec{b} = \left(\dfrac{3\sqrt{15} + 4}{17}; \dfrac{2\sqrt{15} - 3}{17}\right)$ vuông góc với $\vec{p} = \left(\dfrac{2\sqrt{15} - 3}{17}; \dfrac{-3\sqrt{15} + 4}{17}\right)$

Phương trình đường trung trực của MP có dạng:

$$\frac{2\sqrt{15} - 3}{17}x - \frac{3\sqrt{15} + 4}{17}y + C = 0$$

MP qua K $\Leftrightarrow \left(\frac{2\sqrt{15}-3}{17}\right)\left(\frac{57-4\sqrt{15}}{34}\right)-\left(\frac{3\sqrt{15}+4}{17}\right)\left(\frac{38+3\sqrt{15}}{34}\right)+C=0$

$\Leftrightarrow C = 1$.

$\Rightarrow$ Phương trình đường trung trực của đoạn thẳng MP:

$$\frac{2\sqrt{15}-3}{17}x-\frac{3\sqrt{15}+4}{17}y+1=0 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{15}-3\right)x-\left(3\sqrt{15}+4\right)y+17=0.$$

Tâm ω của đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}\left(2\sqrt{15}-3\right)x-\left(3\sqrt{15}+4\right)y=-17\\ 3x+4y=2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-60+6\sqrt{15}}{17\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{15}\left(6-4\sqrt{15}\right)}{17\sqrt{15}}=\dfrac{6-4\sqrt{15}}{17}\\[2ex] y=\dfrac{45+4\sqrt{15}}{17\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{15}\left(4+3\sqrt{15}\right)}{17\sqrt{15}}=\dfrac{4+3\sqrt{15}}{17}\end{cases}$$

$\omega\left(\frac{6-4\sqrt{15}}{17};\frac{4+3\sqrt{15}}{17}\right)$.

Bán kính đường tròn MPQ:

$$M\omega=\sqrt{\left(\frac{6-4\sqrt{15}}{17}-3\right)^2+\left(\frac{4+3\sqrt{15}}{17}-2\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{15\left[\left(3\sqrt{15}+4\right)^2+\left(2\sqrt{15}-3\right)^2\right]}}{17}=\frac{\sqrt{15}}{17}\sqrt{220+12\sqrt{15}}$$

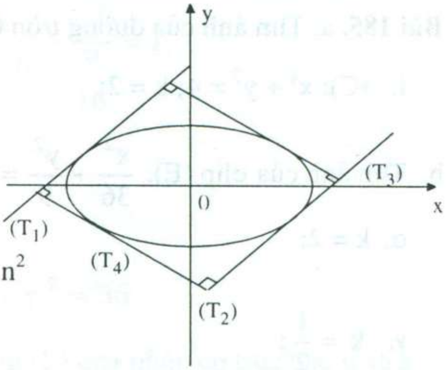
$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (MPQ):

$$\left(x-\left(\frac{6-4\sqrt{15}}{17}\right)\right)^2+\left(y-\frac{4+3\sqrt{15}}{17}\right)^2=\frac{15\left(220+12\sqrt{15}\right)}{289}.$$

Bài 184. Viết phương trình các cạnh hình vuông ngoại tiếp elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Giải

Xem hình vẽ: Các cạnh của hình vuông ngoại tiếp (E) nhân tâm O(0; 0) làm tâm đối xứng.



Giả sử (T$_1$) có phương trình $mx - y + n = 0$

$\Rightarrow$ (T$_2$) có phương trình $mx - y - n = 0$

$\Rightarrow$ (T$_3$) có phương trình $x + my + p = 0$

$\Rightarrow$ (T$_4$) có phương trình $x + my - p = 0$

(các đường thẳng đối xứng nhau qua gốc tọa độ O) có tung độ gốc đối nhau).

Do (T$_1$) tiếp xúc (E) $\Leftrightarrow m^2a^2 + (-1)^2.b^2 = n^2$

$\Leftrightarrow m^2.a^2 + b^2 = n^2$

Do (T$_3$) tiếp xúc (E) $\Leftrightarrow 1^2.a^2 + m^2.b^2 = p^2$

$\Leftrightarrow a^2 + m^2b^2 = p^2$

$$\left.\begin{array}{l} d(O;(T_1)) = \dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}} \\ d(O;(T_2)) = \dfrac{|p|}{\sqrt{1+m^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow |n| = |p| \Leftrightarrow p^2 = n^2$$

$\Rightarrow m^2a^2 + b^2 = a^2 + m^2b^2 \Leftrightarrow (m^2(a^2 - b^2) = a^2 - b^2$

$\Leftrightarrow m^2 = 1$ có quyền chọn $m = 1 \Rightarrow n^2 = a^2 + b^2 = p^2$

Vậy: (T$_1$). $x - y + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$

(T$_2$): $x - y - \sqrt{a^2 + b^2} = 0$

(T$_3$): $x + y + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$

(T$_4$): $x + y - \sqrt{a^2 + b^2} = 0$

Giới thiệu phép "co" về trục Ox:

Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = a^2$

Với mỗi điểm $M(x; y) \in (C)$, ta thực hiện phép biến hình biến $M(x; y)$ thành

$$M'(x'; y') \text{ sao cho } \begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{b}{a}y \end{cases} \quad (*)$$

Thay $x = x'$, $y = \dfrac{a}{b}y'$ thì phương trình (C) trở thành:

$$x'^2 + \frac{a^2}{b^2}y' = a^2 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

(C) trở thành elip

Phép (*) gọi là phép "co" về trục Ox, tỉ số $k = \dfrac{b}{a}$.

Bài 185. a. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép co về trục Ox, tỉ số k:

i. (C): $x^2 + y^2 = 4$; $k = 2$; ii. (C): $x^2 + y^2 = 25$; $k = \frac{4}{5}$

b. Tìm ảnh của elip (E): $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ qua phép co về trục Ox, tỉ số k:

α. $k = 2$; β. $k = 4$;

γ. $k = \frac{1}{2}$; λ. $k = -2$.

Giải

a. i. $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = \frac{y'}{2} \end{cases}$

$$x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x'^2 + \left(\frac{y'}{2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

ii. $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{4}{5}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = \frac{5}{4}y' \end{cases}$

$$x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow x'^2 + \frac{25}{16}y'^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

α. $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = \frac{y'}{2} \end{cases}$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{9} = 1 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = 36$$

β. $\begin{cases} x' = x \\ y' = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = \frac{y'}{4} \end{cases}$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{36} + \frac{\frac{y'^2}{16}}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{144} = 1$$

γ. $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = 2y' \end{cases}$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{36}+\frac{(4y')^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{36}+\frac{y'^2}{\frac{9}{16}}=1$$

λ. $\begin{cases} x'=x \\ y'=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=-\frac{1}{2}y' \end{cases}$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{36}+\frac{y'^2}{9}=1 \Leftrightarrow x'^2+y'^2=36.$$

Bài 186. Tìm phương trình ảnh (L’) của đường (L) qua phép co trục Ox, tỉ số k

a. (L): $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ b. (L): $(\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

Giải

a. Từ $\begin{cases} x'=x \\ y'=ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-\alpha=x-\alpha \\ \frac{1}{k}y'-\beta=y-\beta \end{cases}$

$$(L): (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Leftrightarrow (x'-\alpha)^2+\left(\frac{1}{k}y'-\beta\right)^2=R^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x'-\alpha)^2}{R^2}+\frac{(y'-k\beta)^2}{k^2R^2}=1 \quad (L')$$

b. (L): $\frac{(x'-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ thay theo phép co: $\begin{cases} x'-x=x-\alpha \\ \frac{1}{k}y'-\beta=y-\beta \end{cases}$

$$(L) \Rightarrow \frac{(x'-\alpha)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{1}{k}y'-\beta\right)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{(x'-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y'-k\beta)^2}{k^2b^2}=1$$

Bài 187. a. Tìm phương trình đường (L’) là ảnh của đường (L) F(x; y) = 0 qua phép co về trục Oy, tỉ số k ($k \neq 0, k \neq \pm 1$).

b. Tìm ảnh của elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b > 0)$ qua phép co về trục Oy, tỉ số $\frac{b}{a}$.

Giải

a. Công thức của phép co về trục Oy:

$$\begin{cases} x'=kx \\ y'=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{k}x' \\ y=y' \end{cases}$$

$$(L): F(x; y) = 0 \Rightarrow (L'): F\left(\frac{1}{k}x', y'\right) = 0$$

b. Phép co: $\begin{cases} x' = \dfrac{b}{a}x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{b}x' \\ y = y' \end{cases}$

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow (E'): \frac{\left(\frac{a}{b}x'\right)}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = b^2$$

Bài 188. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

a. M và N là hai điểm phân biệt thuộc (E) sao cho $(Ox, OM) = \varphi_1$, $(Ox, ON) = \varphi_1$ $\left(\varphi_1, \varphi_2 \in [0; 2\pi]\right)$. Viết phương trình đường thẳng MN.

b. Viết phương trình tiếp tuyến và phương trình pháp tuyến của elip tại điểm $M_0\left(a\cos\varphi_0; b\sin\varphi_0\right)$.

Giải

a. $M\left(a\cos\varphi_1; b\sin\varphi_1\right)$, $N\left(a\cos\varphi_2; b\sin\varphi_2\right)$

$$\overrightarrow{MN} = \left(a(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1); b(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\right)$$

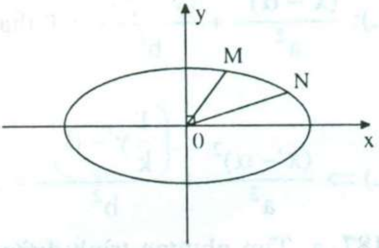
$$= \left(-2a\sin\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}; 2b\cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}.\sin\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$$

Cùng phương với :

$$\vec{p} = \left(a\sin\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}; -b\cos\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

Vuông góc với:

$$\vec{q} = \left(b\cos\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}; a\sin\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$



Phương trình đường thẳng MN có dạng:

$$xb\cos\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + ay\sin\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + C = 0$$

Qua $M\left(a\cos\varphi_1; b\sin\varphi_1\right) \Leftrightarrow ab\cos\varphi_1.\cos\dfrac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + ab.\sin\varphi_1.\sin\dfrac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + C = 0$

$$\Leftrightarrow C = -ab\left[\cos\varphi_1.\cos\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + \sin\varphi_1.\sin\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right]$$

$$= -ab\cos\left[\varphi_1 - \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right] = -ab.\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng MN:

$$bx.\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2} + ay.\sin\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2} - ab.\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a}.\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2} + \frac{y}{b}.\sin\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2} - \cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) = 0$$

b. $M_0\left(a.\cos\varphi_0; b\sin\varphi_0\right) \in (E)$. Phương trình tiếp tuyến tại M_0:

$$\frac{a.\cos\varphi_0.x}{a^2} + \frac{b\sin\varphi_0.y}{b^2} - a = 0 \Leftrightarrow \frac{x.\cos\varphi_0}{a} + \frac{y.\sin\varphi_0}{b} - 1 = 0$$

Phương trình pháp tuyến của (E) tại $M_0\left(a\cos\varphi_0; b\sin\varphi_0\right)$ có dạng:

$$\frac{\sin\varphi_0}{b}.x - \frac{\cos\varphi_0}{a}.y + C = 0$$

Pháp tuyến qua $M_0 \Leftrightarrow \frac{\sin\varphi_0}{b}.a\cos\varphi_0 - \frac{\cos\varphi_0}{a}b.\sin\varphi_0 + C = 0$

$$\Leftrightarrow C = \cos\varphi_0.\sin\varphi_0\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2}\sin 2\varphi_0\,\frac{b^2 - a^2}{ab}$$

$$\Leftrightarrow C = -\frac{\sin 2\varphi_0}{2}.\frac{c^2}{ab}$$

Phương trình cần tìm: $\frac{\sin\varphi_0}{b}.x - \frac{\cos\varphi_0}{a}.y - \frac{\sin 2\varphi_0}{2}.\frac{c^2}{ab} = 0$

Bài 189. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ có các đỉnh trên trục lớn là A_1, A_2, các đỉnh trên trục nhỏ là B_1, B_2. Điểm M chạy trên (E) không trùng với các đỉnh của (E). Chứng minh dây cung chung của các đường tròn (MA_1A_2) và (MB_1B_2) tiếp xúc với (E).

Giải

$M(x_0; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

(hoặc: $y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)$, hoặc $a^2 - x_0^2 = \frac{a^2y_0^2}{b^2}$)

$A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$. Phương trình đường tròn (MA_1A_2) có dạng:

$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + C = 0$

qua M $\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 2mx_0 - 2ny_0 + C = 0$ (1)

qua $A_1 \Leftrightarrow a^2 + 2ma + C = 0$ (2)

qua $A_2 \Leftrightarrow a^2 - 2ma + C = 0$ (3)

Trừ từng vế (2) và (3) được $4am = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow C = -a^2$

Thế vào (1): $x_0^2 + y_0^2 - 2ny_0 - a^2 = 0 \Leftrightarrow n = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 - a^2}{2y_0}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (A_1A_1M):

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{x_0^2 + y_0^2 - a^2}{y_0}\right)y - a^2 = 0 \qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} M(x_0;y_0) \in (E) \\ B_1(0;-b) \\ B_2(0;b) \end{array}\right\} \text{Phương trình đường tròn } (MB_1B_2) \text{ có dạng:}$$

$$x^2 + y^2 - 2yx - 2qy + C = 0$$

qua M $\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 2px_0 - 2qy_0 + C = 0$ (1')

qua $B_1 \Leftrightarrow b^2 + 2qb + C = 0$ (2')

qua $B_2 \Leftrightarrow b^2 - 2qb + C = 0$ (3')

Trừ từng vế (2') và (3') được $4qb = 0 \Leftrightarrow q = 0 \Leftrightarrow C = -b^2$

Thế vào (1'): $x_0^2 + y_0^2 - 2px_0 - b^2 = 0 \Leftrightarrow p = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 - b^2}{2x_0}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (MB_1B_2):

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{x_0^2 + y_0^2 - b^2}{x_0}\right)x - b^2 = 0 \qquad (6)$$

Trừ từng vế (5) và (6) được phương trình dây cung chung của hai đường tròn (MA_1A_2) và (MB_1B_2):

$$\left(\frac{x_0^2 + y_0^2 - b^2}{x_0}\right)x - \left(\frac{x_0^2 + y_0^2 - a^2}{y_0}\right)y - \left(a^2 - b^2\right) = 0$$

Thay $y_0^2 - b^2 = -\dfrac{b^2}{a^2}x_0^2$ và $x_0^2 - a^2 = -\dfrac{a^2y_0^2}{b^2}$

$$\left(\frac{x_0^2 - \frac{b^2}{a^2}x_0^2}{x_0}\right)x - \left(\frac{y_0^2 - \frac{a^2}{b^2}y_0^2}{y_0}\right)y - (a^2 - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^2 - b^2)x_0^2}{a^2x_0}x + \frac{(a^2 - b^2)y_0^2}{b^2y_0}y - (a^2 - b^2) = 0$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} - 1 = 0$: phương trình dây cung chung của hai đường tròn

(MA_1A_2) và (MB_1B_2) chính là phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Bài 190. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$.

a. Chứng minh với mỗi điểm $M(x; y) \in (E)$, M không trùng với đỉnh $A_1(-a; 0)$ ta tìm được $t \in \mathbb{R}$ sao cho: $\begin{cases} x = f(t) = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y = g(t) = \dfrac{2bt}{1+t^2} \end{cases}$.

Và ngược lại $\forall t \in \mathbb{R}$, điểm $M(f(t); g(t)) \in (E)$

b. Cho hai điểm phân biệt $P(f(t_1); g(t_1))$, $Q(f(t_2); g(t_2))$ thuộc elip (E). Viết phương trình đường thẳng PQ.

c. Viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại $M_0(f(t_0); g(t_0))$.

Giải

a. Từ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2bt}{1+t^2} \end{cases}$ với $t = \tan\dfrac{\varphi}{2}$

Ngược lại: Nếu $M(f(t); g(t)) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2bt}{1+t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos\varphi \\ \dfrac{y}{b} = \sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \cos^2\varphi \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \sin^2\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow M \in (E)$$

b. Có thể viết $P\left(\dfrac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2}; \dfrac{2bt_1}{1+t_1^2}\right)$, $Q\left(\dfrac{a(1-t_2^2}{1+t_2^2}; \dfrac{2bt^2}{1+t_2^2}\right)$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(a\left(\frac{1-t_2^2}{1+t_2^2} - \frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}\right); 2b\left(\frac{t_2}{1+t_2^2} - \frac{t_1}{1+t_1^2}\right)\right)$$

$$= \left(a\frac{1-t_2^2+t_1^2-t_1^2t_2^2-1-t_2^2+t_1^2+t_1^2t_2^2}{(1+t_2^2)(1+t_1^2}; 2b\frac{t_2+t_1^2t_2-t_1-t_1t_2^2}{(1+t_2^2)(1+t_i^2)}\right)$$

$$= \left(\frac{2a(t_1 + t_2)(t_1 - t_2)}{(1 + t_2^2)(1 + t_1^2)}; \frac{-2b(t_1 + t_2)(1 - t_1t_2)}{(1 + t_2^2)(1 + t_1^2)} \right).$$

Cùng phương với $\overrightarrow{m} = \big(a(t_1 + t_2); -b(1 - t_1t_2)\big)$

Vuông góc với $\overrightarrow{n} = \big(b(1 - t_1t_2); a(t_1 + t_2)\big)$ chọn làm vectơ pháp tuyến cho đường thẳng PQ. Phương trình đường thẳng PQ có dạng:

$$b(1 - t_1t_2)x + a(t_1 + t_2)y + C = 0$$

qua P $\Leftrightarrow b(1 - t_1t_2).\dfrac{a(1 - t_1^2)}{1 + t_1^2} + a(t_1 + t_2).\dfrac{2bt_1}{t_1^2 + 1} + C = 0$

$$\Leftrightarrow ab(1 - t_1t_2)(1 - t_1^2) + 2ab(t_1 + t_2).t_1 + C(1 + t_1^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow ab(1 - t_1t_2 - t_1^2 + t_1^3t_2 + 2t_1^2 + 2t_1t_2) + C(1 + t_1^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow ab\left[1 + t_1^2 + t_1t_2(1 + t_1^2)\right] + C(1 + t_1^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow ab(1 + t_1t_2) + C = 0 \Leftrightarrow C = -ab(1 + t_1t_2)$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng PQ:

$$b(1 - t_1t_2)x + a(t_1 + t_2)y - ab(1 + t_1t_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - t_1t_2)\frac{x}{a} + (t_1 + t_2).\frac{y}{b} - (1 + t_1t_2) = 0$$

c. Phương trình tiếp tuyến của (E) tại $M_0\left(\dfrac{a(1 - t_0^2)}{1 + t_0^2}; \dfrac{2bt_0}{1 + t_0^2} \right)$

$$\frac{a(1 - t_0^2)}{(1 + t_0^2)}.\frac{x}{a^2} + \frac{2bt_0}{(1 + t_0^2)}.\frac{y}{b^2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - t_0^2)}{(1 + t_0^2)}.\frac{x}{a} + \frac{2b}{(1 + t_0^2)}.\frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Bài 191. Chứng minh một tứ giác lồi nội tiếp trong một elip là hình bình hành khi và chỉ khi hai đường chéo của nó là hai đường thẳng đi qua tâm của elip.

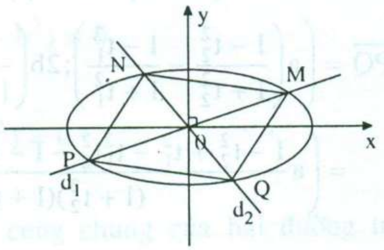
Giải

- Giả sử d_1, d_2 là hai đường thẳng đi qua tâm O của (E).

  d_1 cắt (E) tại P và M: O là trung điểm MP.

  d_2 cắt (E) tại Q và N: O là trung điểm của NQ $\Rightarrow$ MNPQ là hình bình hành

- Phần đảo: hiển nhiên



Bài 192. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và điểm $M(x_1; y_1)$. OM cắt (E) tạo P và Q.

a. Điểm M gọi là nằm trong (E) nếu M nằm trong đoạn PQ, M gọi là nằm ngoài (E) nếu M nằm ngoài đoạn PQ.

Chứng minh M nằm trong (E) $\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$

M nằm ngoài (E) $\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$

b. Giả sử điểm M nằm trong (E). Viết phương trình đường thẳng qua M, cắt (E) tại 2 điểm nhận M làm trung điểm.

Giải

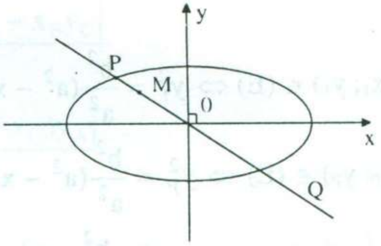
a. Gọi $M(x_1; y_1)$, $P(x_p; y_p)$

- Nếu M nằm trong đoạn PQ thì

$$|x_1|<|x_p| \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2}<\frac{x_p^2}{a^2};$$

$$|y_1|<|y_p| \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{b^2}<\frac{y_p^2}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<\frac{x_p^2}{a^2}+\frac{y_p^2}{b^2}=1$$



- Nếu M nằm bên ngoài đoạn PQ:

$$\left.\begin{array}{l} |x_1|>|xp| \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2}>\frac{x_p^2}{a^2} \\ |y_1|>|y_p| \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{b^2}>\frac{y_p2}{b^2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>\frac{x_p^2}{a^2}+\frac{y_p^2}{b^2}=1$$

b. Gọi d là đường thẳng $y=k(x-x_1)+y_1=kx+y_1-kx_1$. Thế vào phương trình (E):

$$b^2x^2+a^2(kx+y_1-kx_1)^2-a^2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2+a^2\left[k^2x^2+2(y_1-kx_1).kx+(y_1-kx_1)^2\right]-a^2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a^2k^2+b^2)x^2+2a^2k(y_1-kx_1)x+a^2\left[(y_1-kx_1)^2-b^2\right]=0$$

Với điều kiện: $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$, phương trình này chắc chắn có hai nghiệm phân biệt x_P, x_Q và $\frac{x_P+x_Q}{2}=\frac{(kx_1-y_1)a^2k}{a^2k^2+b^2}$

M là trung điểm PQ thì: $\dfrac{(kx_1 - y_1)a^2k}{a^2k^2 + b^2} = x_1$

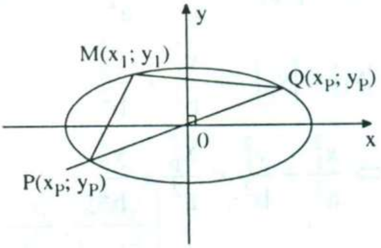
$$\Leftrightarrow k^2a^2x_1 - a^2ky_1 = k^2a^2x_1 + b^2x_1 \Leftrightarrow k = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

Đường thẳng cần tìm: $y = -\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) + y_1$

$$\Leftrightarrow (y - y_1)a^2y_1 = -b^2x_1(x - x_1) \Leftrightarrow \frac{x_1}{a^2}(x - x_1) + \frac{y_1}{b^2}(y - y_1) = 0.$$

Bài 193. Cho tam giác MPQ nội tiếp trong elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ sao cho PQ đi qua tâm O của (E). Gọi m_1, m_2 là hệ số góc của các đường thẳng MP, MQ. Chứng minh $m_1.m_2 = -\dfrac{b^2}{a^2}$.

Giải



$$M(x_1; y_1) \in (E) \Leftrightarrow y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2)$$

$$P(x_P; y_P) \in (E) \Leftrightarrow y_P^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_P^2)$$

$$Q(x_Q; y_Q) \in (E) \Leftrightarrow y_Q^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_Q^2)$$

Phương trình đường thẳng MP: $y = m_1(x - x_1) + y_1$

Phương trình đường thẳng MQ: $y = m_2(x - x_1) + y_1$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{y - y_1}{x = x_1}; P \in MP \Leftrightarrow m_1 = \frac{y_P - y_1}{x_P - x_1}$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{y - y_1}{x - x_1}; Q \in MQ \Rightarrow m_2 = \frac{y_Q - y_1}{x_Q - x_1}$$

$$\Rightarrow m_1.m_2 = \frac{(y_P - y_1)(y_Q - Y_1)}{(x_P - x_1)(x_Q - x_1)} = \frac{y_P.y_Q - (y_P + y_Q)y_1 + y_1^2}{x_P.x_Q - (x_P + x_Q)x_1 + x_1^2}$$

$$= \frac{y_P.y_Q + y_1^2}{x_P.x_Q + x_1^2} \text{ (do P, Q đối xứng qua O} \Leftrightarrow x_P + x_Q = 0,\ y_P + y_Q = 0)$$

$$= \frac{y_1^2 - y_P^2}{x_P.x_Q + x_1^2} \text{ (do } y_P = -y_Q;\ x_P = -x_Q)$$

$$= \frac{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2) - \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_P^2)}{x_1^2 - x_P^2} = \frac{-\frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - x_P^2)}{(x_1^2 - x_P^2)} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Bài 194. Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép co trục Ox, tỉ số k ($k \neq 0$).

Chứng minh $S_{A'B'C'} = |k|.S_{ABC}$.

Giải

$A(x_A; y_A) \Rightarrow A'(x_A; ky_A)$, $B(x_B; y_B) \Rightarrow B'(x_B; y_B)$, $C(x_C; ky_C) \Rightarrow C'(x_C; ky_C)$

- Độ dài $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

Phương trình cạnh BC:

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \Leftrightarrow (y_C - y_B)x - (x_C - x_B)y + x_Cy_B - x_By_C = 0$$

Độ dài đường cao kẻ từ A: $h_A = d(A;BC)$

$$= \frac{|(y_C - y_B)x_A - (x_C - x_B)y_A + x_Cy_B - x_By_C|}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}$$

$$= \frac{|(x_A - x_B)y_C + (x_C - x_A)y_B + (x_B - x_C)y_A|}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.h_A = \frac{1}{2}|(x_A - x_B)y_C + (x_C - x_A)y_B + (x_B - x_C)y_A|$$

$$\Rightarrow S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}|x_A - x_B).y'_C + (x_C - x_A)y'_B + (x_B - x_C)y'_A|$$

$$= \frac{1}{2}|(x_A - x_B).ky_C + (x_C - x_A).ky_B + (x_B - x_C)k.y_A|$$

$$= \frac{1}{2}|k|\left(|(x_A - x_B).y_C + (x_C - x_A).y_B + (x_B - x_C).y_A|\right)$$

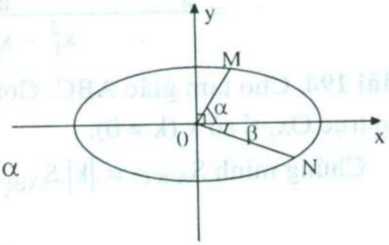
$$= |k|.S_{ABC}.$$

Bài 195. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, M và N thuộc (E) sao cho tích các hệ số góc của OM và ON bằng $-\frac{b^2}{a^2}$.

a. Chứng minh $OM^2 + ON^2 = a^2 + b^2$.

b. Diện tích tam giác OMN không đổi.

Giải



a. Gọi (Ox, OM) = α, (Ox, ON) = β

$M(x_M; y_M)$ thì $\begin{cases} x_M = a\cos\alpha \\ y_M = b\sin\alpha \end{cases}$; $\begin{cases} x_N = a\cos\beta \\ y_N = b\sin\beta \end{cases}$

k_1 là hệ số góc của OM thì $k_1 = \dfrac{y_M}{x_M} = \dfrac{b}{a}.\tan\alpha$

k_2 là hệ số góc của ON thì $k_2 = \dfrac{y_N}{x_N} = \dfrac{b}{a}.\tan\beta$

$$k_1.k_2 = -\frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2}.\tan\alpha.\tan\beta = -\frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \tan\alpha.\tan\beta = -1$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{-1}{\tan\beta} = -\cot\beta = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}+\beta$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = \cos\beta\,;\ \cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = -\sin\beta$$

$$OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta$$

$$ON^2 = x_N^2 + y_N^2 = a^2\cos^2\beta + b^2\sin^2\beta = a^2\cos^2\beta + b^2\sin^2\beta$$

$$\Rightarrow OM^2 + ON^2 = a^2(\sin^2\beta + \cos^2\beta) + b^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) = a^2 + b^2.$$

b. Với điều kiện đã có trong câu a, có thể viết:

$M(-a\sin\beta; b\cos\beta)$, $N(a\cos\beta; b\sin\beta)$

$$MN = \sqrt{a^2(\sin\beta+\cos\beta)^2 + b^2(\sin\beta-\cos\beta)^2}$$

Phương trình đường thẳng MN: $\dfrac{x + a\sin\beta}{a(\cos\beta+\sin\beta)} = \dfrac{y - b\cos\beta}{b(\sin\beta-\cos\beta)}$

$\Leftrightarrow (\sin\beta - \cos\beta)bx + ab\sin^2\beta - ab.\sin\beta\cos\beta$

$= (\cos\beta + \sin\beta).ay - ab\cos^2\beta - ab\sin\beta\cos\beta$

$\Leftrightarrow (\sin\beta - \cos\beta).bx - (\sin\beta + \cos\beta).ax + ab = 0$

$$d(O,MN) = \frac{|ab|}{\sqrt{b^2(\sin\beta-\cos\beta)^2 + a^2(\sin\beta+\cos\beta)^2}}$$

$$S_{OMN} = \frac{1}{2}.M.d(0,MN) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2(\sin\beta+\cos\beta)^2 + b^2(\sin\beta-\cos\beta)^2}$$

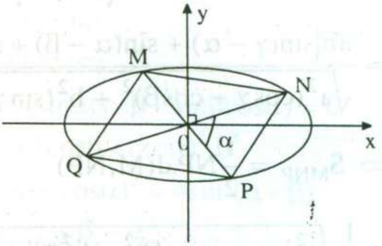
$$\times\frac{|ab|}{\sqrt{b^2(\sin\beta-\cos\beta)^2 + a^2(\sin\beta+\cos\beta)^2}} = \frac{1}{2}ab.$$

Bài 196. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

a. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích hình bình hành nội tiếp trong elip (E).

b. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác nội tiếp trong elip (E).

Giải



a. Xem hình vẽ: Giả sử góc giữa hai đường chéo MP và NQ của hình bình hành MNPQ là α thì:

$$S_{MNPQ}=\frac{1}{2}MP.NQ.\sin\alpha$$

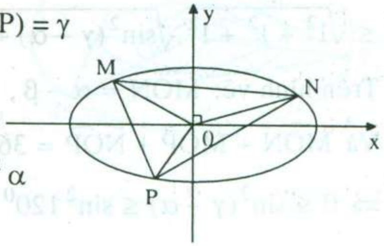
$$=\frac{1}{2}2OM.2ON.\sin\alpha=2OM.ON.\sin\alpha\le 2OM.ON$$: có đẳng thức khi $\alpha=90^0$.

Theo kết quả bài 195 ⇒ khi OM vuông góc với ON thì:

$$S_{OMN}=\frac{1}{2}OM.ON=\frac{1}{2}ab\Rightarrow S_{MNPQ}\max=2ab$$

b. Giả sử (Ox, OM) = α, (Ox, ON) = β, (Ox, OP) = γ

⇒ M(acosα; bsinα), N(acosβ; bsinβ), P(acosγ; bsinγ)



(Lưu ý rằng: $\begin{cases}x_M=a\cos\alpha\\ y_M=b\sin\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x_M^2}{a^2}=\cos^2\alpha\\ \frac{y_M^2}{b^2}=\sin^2\alpha\end{cases}$

$\Rightarrow\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1$ và $M\in(E)$)

- $NP=\sqrt{a^2(\cos\gamma-\cos\beta)^2+b^2(\sin\gamma-\sin\beta)^2}$
- Phương trình đường thẳng NP: $\frac{x-x_N}{x_P-x_N}=\frac{y-y_N}{y_P-y_N}$

$$\Leftrightarrow\frac{x-a\cos\beta}{a(\cos\gamma-\cos\beta)}=\frac{y-b\sin\beta}{b(\sin\gamma-\sin\beta)}$$

⇔ b(sinγ - sinβ).x – a(cosγ - cosβ).y + ab(sinβcosγ - sinγcosβ) = 0

D(M, NP) =

$$=\frac{|(b\sin\gamma-\sin\beta).a\cos\alpha-a(\cos\gamma-\cos\beta).b\sin\alpha+ab(\sin\beta\cos\gamma-\sin\gamma\cos\beta)|}{\sqrt{b^2(\sin\gamma-\sin\beta)^2+a^2(\cos\gamma-\cos\beta)^2}}$$

$$= \frac{ab\left|\sin\gamma\cos\alpha - \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta\right|}{\sqrt{a^2(\cos\gamma - \cos\beta)^2 + b^2(\sin\gamma - \sin\beta)^2}}$$

$$= \frac{ab\left|(\sin\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\cos\gamma) + (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) + (\sin\beta\cos\beta\gamma - \sin\gamma\cos\beta)\right|}{\sqrt{a^2(\cos\gamma - \cos\beta)^2 + b^2(\sin\gamma - \sin\beta)^2}}$$

$$= \frac{ab\left|\sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma)\right|}{\sqrt{a^2(\cos\gamma - \cos\beta)^2 + b^2(\sin\gamma - \sin\beta)^2}}$$

$$\Rightarrow S_{MNP} = \frac{1}{2}NP.d(M, NP)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2(\cos\gamma - \cos\beta)^2 + b^2(\sin\gamma - \sin\beta)^2}.\frac{ab\left|\sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma)\right|}{\sqrt{a^2(\cos\gamma - \cos\beta)^2 + b^2(\sin\gamma - \sin\beta)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}ab\left|\sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma)\right|$$

$$\left|\sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma)\right|$$

$$\le \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}.\sqrt{\sin^2(\gamma - \alpha) + \sin^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\beta - \gamma)}$$

Trên hình vẽ: $\widehat{MON} = \alpha - \beta$, $\widehat{MOP} = \gamma - \alpha$, $\widehat{NOP} = \beta - \gamma$

Và $\widehat{MON} + \widehat{MOP} + \widehat{NOP} = 360^0$

$$\Rightarrow 0 \le \sin^2(\gamma - \alpha) \le \sin^2 120^0 = \frac{3}{4}$$

$$0 \le \sin^2(\alpha - \beta) \le \sin^2 120^0 = \frac{3}{4}$$

$$0 \le \sin^2(\beta - \gamma) \le \sin^2 120^0 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \left|\sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma)\right| \le \sqrt{3}.\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow S_{MNP} \le \frac{1}{2}ab.\sqrt{3}.\frac{3}{2} = \frac{3ab\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{MNP}\max = \frac{3ab\sqrt{3}}{4}.$$

Bài 197. Cho hai elip (E_1): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và (E_2): $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$. Từ điểm M trên ($E_2$) kẻ hai tiếp tuyến đến (E_1), hai tiếp tuyến này cắt (E_2) tại N, P. Chứng minh đường thẳng NP tiếp xúc với (E_1).

Giải

Giả sử M, N, P $\in$ (E_2) và M $\ne$ N $\ne$ P

Gọi (Ox, OM = α, (Ox, ON) = β, (Ox, OP) = γ ($\alpha \ne \beta \ne \gamma$)

$\Rightarrow$ M(2acosα; 2bsinα), N(2acosβ; 2bsinβ), P(2acosγ; 2bsinγ)

Phương trình đường thẳng MN:

$$\frac{x - 2a\cos\alpha}{2a\cos\beta - 2a\cos\alpha} = \frac{y - 2b\sin\alpha}{2b\sin\beta - 2b\sin\alpha}$$

$\Leftrightarrow b(\sin\beta - \sin\alpha)x - 2ab\sin\beta\cos\alpha + 2ab\cos\alpha\sin\alpha$

$= a(\cos\beta - \cos\alpha).y - 2ab\sin\alpha\cos\beta + 2ab\sin\alpha\cos\alpha$

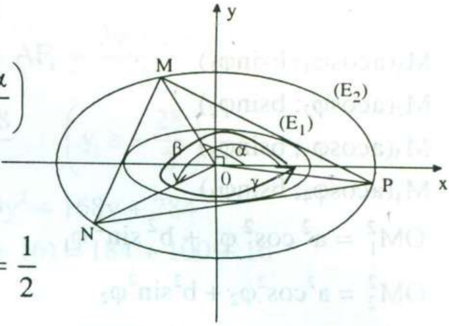
$\Leftrightarrow b(\sin\beta - \sin\alpha)x - a(\cos\beta - \cos\alpha)y + 2ab(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) = 0$

MN tiếp xúc $(E_1) \Leftrightarrow b^2.(\sin\beta - \sin\alpha)^2a^2 + a^2(\cos\beta - \cos\alpha)^2.b^2$

$= 4a^2b^2(\sin(\alpha - \beta)^2 \Leftrightarrow (\sin\beta - \sin\alpha)^2 + (\cos\beta - \cos\alpha)^2 = 4\sin^2(\alpha - \beta)$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{\beta+\alpha}{2}.\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2} + 4\sin^2\frac{\beta+\alpha}{2}.\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$= 16\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$



$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\beta+\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta+\alpha}{2}\right)$$

$$= 16\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 1 \Leftrightarrow 1 + \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{2\pi}{3} \quad (1)$$

Hoàn toàn tương tự: MO tiếp xúc $(E_1) \Leftrightarrow \gamma - \alpha = \frac{2\pi}{3}$ (2)

Phương trình đường thẳng NP: $\dfrac{x - 2a\cos\beta}{2a\cos\gamma - 2a\cos\beta} = \dfrac{y - 2b\sin\beta}{2b\sin\gamma - 2b\sin\beta}$

$\Leftrightarrow b(\sin\gamma - \sin\beta)x - 2ab\sin\gamma\cos\beta + 2ab\sin\beta\cos\beta$

$= a(\cos\gamma - \cos\beta)y - 2ab\sin\beta\cos\gamma + 2ab\sin\beta\cos\beta$

$\Leftrightarrow b(\sin\gamma - \sin\beta).x - a(\cos\gamma - \cos\beta)y + 2ab(\sin\beta.\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta) = 0$

$\Leftrightarrow b(\sin\gamma - \sin\beta)x - a(\cos\gamma - \cos\beta)y + 2ab\sin(\beta - \gamma) = 0$

Từ (1) và (2) $\Leftrightarrow \gamma - \beta = \frac{4\pi}{3}$; $\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\gamma - \beta) = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 1 + \cos(\gamma - \beta) = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\cos^2\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 16\sin^2\frac{\gamma-\beta}{2}.\cos^2\frac{\gamma-\beta}{2} = 4\sin^2\frac{\gamma-\beta}{2}\left(\cos^2\frac{\gamma+\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma+\beta}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2(\gamma-\beta) = 4\cos^2\frac{\gamma+\beta}{2}.\sin^2\frac{\gamma-\beta}{2} + 4\sin^2\frac{\gamma+\beta}{2}.\sin^2\frac{\gamma-\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2(\gamma-\beta) = \left(2\cos\frac{\gamma+\beta}{2}.\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\right)^2 + \left(2\sin\frac{\gamma+\beta}{2}.\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow 4a^2b^2.\sin^2(\gamma-\beta) = b^2(\sin\beta - \sin\gamma)^2.a^2 + a^2(\cos\beta - \cos\gamma)^2.b^2$

$\Leftrightarrow$ NP tiếp xúc (E_1)

Bài 198. Cho elip (E) có phương trình tham số: $\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$

M_1, M_2, M_3, M_4 là các điểm phân biệt thuộc (E) ứng với các tham số φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Chứng minh M_1, M_2, M_3, M_4 thuộc một đường tròn

$\Leftrightarrow \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = k.\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Giải

$M_1(a\cos\varphi_1; b\sin\varphi_1)$

$M_2(a\cos\varphi_2; b\sin\varphi_2)$

$M_3(a\cos\varphi_3; b\sin\varphi_3)$

$M_4(a\cos\varphi_4; b\sin\varphi_4)$

$OM_1^2 = a^2\cos^2\varphi_1 + b^2\sin^2\varphi_1$

$OM_2^2 = a^2\cos^2\varphi_2 + b^2\sin^2\varphi_2$

$OM_3^2 = a^2\cos^2\varphi_3 + b^2\sin^2\varphi_3$

$OM_4^2 = a^2\cos^2\varphi_4 + b^2\sin^2\varphi_4$

M_1, M_2, M_3, M_4 cùng thuộc một đường tròn

$\Leftrightarrow OM_1^2 = OM_2^2 = OM_3^2 = OM_4^2$

$OM_1^2 = OM_2^2 \Leftrightarrow a^2\cos^2\varphi_1 + b^2\sin^2\varphi_1 = a^2\cos^2\varphi_2 + b^2\sin^2\varphi_2$

$\Leftrightarrow a^2(\cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2) + b^2(\sin^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_2) = 0$

$\Leftrightarrow a^2.(\cos2\varphi_1 - \cos2\varphi_2) + b^2(\cos2\varphi_2 - \cos2\varphi_1) = 0$

$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)(\cos2\varphi_1 - \cos2\varphi_2) = 0 \Leftrightarrow \cos2\varphi_1 - \cos2\varphi_2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin(\varphi_1 + \varphi_2).\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \qquad (\varphi_1 \neq \varphi_2)$

$\Leftrightarrow \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 0 \Leftrightarrow \varphi_1 + \varphi_2 = m\pi$

Tương tự: $\varphi_2 + \varphi_3 = n\pi$

$\varphi_3 + \varphi_4 = p\pi$

$\varphi_4 + \varphi_1 = q\pi$

$\Rightarrow 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = (m + n + p + q)\pi \Rightarrow m + n + p + q = 2k$

$\Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Bài 199. Cho elip (E) di động có tâm I (2; –1) độ dài trục lớn bằng 10 và qua A(2; –4). Tìm quỹ tích các tiêu điểm của (E).

Giải

Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E) thì do F_1, F_2 đối xứng nhau qua I

$\Rightarrow F_1(x; y) \Rightarrow F_2(4 - x; -2- y)$

$$AF_1 = \sqrt{(x-2)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 8y + 20}$$

$$AF_2 = \sqrt{(2-x)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8}$$

$$AF_1^2 - AF_2^2 = 12y + 12$$

$$AF_1 + AF_2 = 10$$

$$\Rightarrow AF_1 - AF_2 = \frac{12(y+1)}{10} = \frac{6(y+1)}{5}$$

$$\Rightarrow 2AF_1 = 10 + \frac{6(y+1)}{5} = \frac{6y+56}{5} \Rightarrow AF_1 = \frac{3y+28}{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 8y + 20} = \frac{3y+28}{5} \quad \left(y \geq -\frac{28}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 25x^2 + 25y^2 - 100x + 200y + 500 = 9y^2 + 168y + 784$$

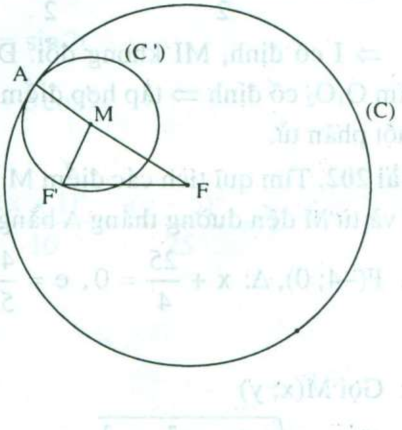
$$\Leftrightarrow (25x^2 - 100x + 100) + (16y^2 + 32y + 16) = 184 + 100 + 16$$

$$\Leftrightarrow 25(x-2)^2 + 16(y+1)^2 = 400.$$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y+1)^2}{25} = 1$ (Dùng $AF_2 = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8} = \dfrac{22-3y}{5}$ được kết quả tương tự).

Bài 200. Cho đường tròn (C) tâm F, bán kính 2a và điểm F' nằm trong đường tròn và khác F. Tìm tập hợp tâm các đường tròn qua F' và tiếp xúc với đường tròn (C).

Giải



Gọi (C') là đường tròn tâm M, qua F' và tiếp xúc trong với (C).

Do (C') tiếp xúc trong với (C) nên gọi tiếp điểm của (C) và (C') là A thì AF = 2a

$\Leftrightarrow$ MF' + MF = 2a

Tập hợp tâm M của các đường tròn (C') qua F' và tiếp xúc với (C) là một elip có hai tiêu điểm là F' và F, trục lớn bằng 2a.

Bài 201. Cho đường tròn (C_1) tâm O_1 bán kính R_1 và đường tròn (C_2) tâm O_2 bán kính R_2 với $O < O_1O_2 < R_1 - R_2$.

Gọi M là tâm đường tròn (C) di động tiếp xúc với (C_1) và (C_2). Tìm tập hợp điểm M nếu:

a. (C) tiếp xúc trong với (C_1) và tiếp xúc ngoài với (C_2).

b. (C) tiếp xúc trong với (C_1) và (C_2).

Giải

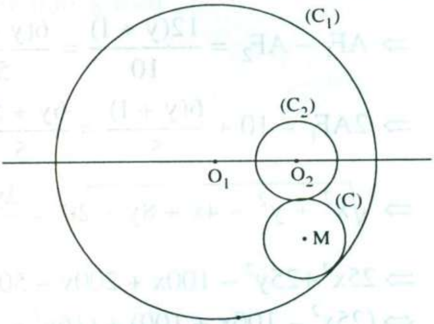
a. Vị trí của (C_1) và (C_2) như hình vẽ:

(C) có bán kính R. (C) tiếp xúc trong với $(C_1) \Leftrightarrow MO_1 = R_1 - R$

(C) tiếp xúc ngoài với (C_2):

$MO_2 = R_2 + R$

$MO_1 + MO_2 = R_1 + R_2$: tập hợp điểm M là elip (E) có hai tiêu điểm là O_1, O_2 và độ dài trục lớn bằng $R_1 + R_2$.



b. Vị trí của (C_1), (C_2) và (C) như hình vẽ:

M là tâm của (C)

(C) tiếp xúc trong với (C_1)

$\Leftrightarrow MO_1 = R_1 - R$.

(C) tiếp xúc ngoài với (C_2)

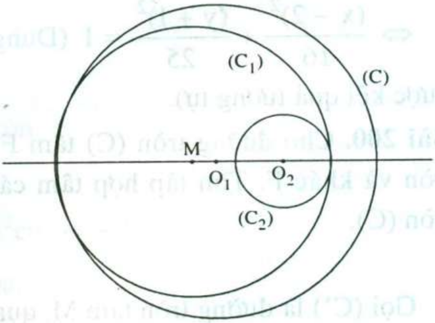
$\Leftrightarrow MO_2 = R - R_2$

$\Rightarrow MO_1 + MO_2 = R_1 - R_2$

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng O_1O_2 thì :

$$MI = \frac{MO_1 + MO_2}{2} = \frac{R_1 - R_2}{2}$$

$\Rightarrow$ I cố định, MI khong đổi. Đường nối tâm O_1O_2 cố định $\Rightarrow$ tập hợp điểm M chỉ có một phân tử.



Bài 202. Tìm quĩ tích các điểm M sao cho tỉ số khoảng cách từ điểm M đến điểm F và từ M đến đường thẳng Δ bằng số e với:

a. $F(-4; 0)$, $\Delta: x + \frac{25}{4} = 0$, $e = \frac{4}{5}$ b. $F(-1; 0)$, $\Delta: 2y + 5 = 0$, $e = \frac{2}{3}$

Giải

a. Gọi M(x; y)

$MF = \sqrt{(-4 - x)^2 + y^2}$

$$d(M, \Delta) = \left|x + \frac{25}{4}\right|$$

$$\frac{MF}{d(M,(\Delta))} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5MF = 4d(M,(\Delta)) \Leftrightarrow 25MF^2 = 16\left[d(M,\Delta)\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 25(16 + 8x + x^2) + 25y^2 = 16\left(x^2 + \frac{25}{2}x + \frac{625}{16}\right)$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 200x + 400 + 25y^2 = 16x^2 + 200x + 625$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

b. $MF = \sqrt{(-1 - x)^2 + y^2}$; $d(M,\Delta) = \frac{1}{2}|2y + 5|$

$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(-1 - x)^2 + y^2}}{\frac{1}{2}|2y + 5|} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{(-1 - x)^2 + y^2} = |2y + 5|$$

$$\Leftrightarrow 9(x^2 + 2x + 1) + 9y^2 = 4y^2 + 20y + 25$$

$$\Leftrightarrow 9(x + 1)^2 + 5(y^2 - 4y + 4) = 5 \Leftrightarrow \frac{(x + 1)^2}{\frac{5}{9}} + (y - 2)^2 = 1$$

Bài 203. Tìm tập hợp các điểm M có tọa độ:

a. $\begin{cases} x = 4\sin 2t - 1 \\ y = 10\cos^2 t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ b. $\begin{cases} x = 2\dfrac{(1 - 2t^2)}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{4t}{1 + t^2} \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Giải

a. $\begin{cases} x = 4\sin 2t - 1 \\ y = 10\cos^2 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x + 1}{4} = \sin 2t \\ y = 5(2\cos^2 t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x + 1}{4} = \sin 2t \\ y = 5 + 5\cos 2t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x + 1}{4} = \sin 2t \\ \dfrac{y - 5}{5} = \cos 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x + 1)^2}{16} = \sin^2 2t \\ \dfrac{(y - 5)^2}{25} = \cos^2 2t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(x + 1)^2}{16} + \frac{(y - 5)^2}{25} = 1$$

$$\text{b. } \begin{cases} x = \dfrac{2(1-2t^2)}{1+t^2} \\ y = \dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-2t^2}{1+t^2} \\ \dfrac{y}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \dfrac{2\sqrt{3}t}{1+t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{1-4t^2+4t^4}{(1+t^2)^2} \\ \dfrac{y^2}{\frac{4}{3}} = \dfrac{12t^2}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = \frac{4(t^2+1)^2}{(1+t^2)^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1.$$

Bài 204. Tìm tập hợp tâm các đường tròn

a. $x^2 + y^2 - 4x\cos t - 2y\sin t + 3\cos^2 t + \sin t\cos t = 0$.

b. $x^2 + y^2 + 8x\cos^2 t - 2y(1 + 3\sin 2t) + 16\cos^4 t + \sin 2t(5 + 9\sin 2t) + 1 = 0$.

Giải

a. Đường tròn $x^2 + y^2 - 4x\cos t - 2y\sin t + 3\cos^2 t + \sin t\cos t = 0$ có tâm $I(2\cos t; \sin t)$

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} = \cos^2 t \\ y^2 = \sin^2 t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

b. Đường tròn:

$x^2 + y^2 + 8x\cos^2 t - 2y(1 + 3\sin 2t) + 16\cos^4 t + \sin 2t(5 + 9\sin 2t) + 1 = 0$ có tâm $I(-4\cos^2 t; 1 + 3\sin 2t)$

$$\begin{cases} x = -4\cos^2 t \\ y = 1 + 3\sin 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(1 + \cos 2t) \\ y = 1 + 3\sin 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = -\cos 2t \\ \dfrac{y-1}{3} = \sin 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{4} = \cos^2 2t \\ \dfrac{(y-1)^2}{9} = \sin^2 2t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Bài 205. Cho hai điểm $A(3\cos t; 0)$, $B(0; \sin t)$. Tìm tập hợp điểm $M(x; y)$ sao cho $2\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ khi t thay đổi.

Giải

$$2\overrightarrow{AM} = 2(x - 3\cos t; y) = (2x - 6\cos t; 2y)$$

$$5\overrightarrow{MB} = 5(-x; \sin t - y) = (-5x; 5\sin t - 5y)$$

$$2\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow (-3x - 6\cos t; -3y + 5\sin t) = (0; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 6\cos t = 0 \\ -3y + 5\sin t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = -\cos t \\ \dfrac{y}{\frac{5}{3}} = \sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} = \cos^2 t \\ \dfrac{y^2}{\frac{25}{9}} = \sin^2 t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{9y^2}{25} = 1.$$

Bài 206. Cho elip (E): $x^2 + 4y^2 = 4$ và hai điểm $M(-2; m)$, $N(2; n)$. Gọi A_1, A_2 là hai đỉnh trên trục lớn của (E) $\left(x_{A_1} < x_{A_2}\right)$.

a. Tìm tọa độ giao điểm I của A_1N và A_2N theo m, n.

b. Khi đường thẳng MN tiếp xúc (E), hãy tìm tập hợp các điểm I.

Giải

a. $x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

$A_1(-2; 0)$ $\quad$ $A_2(2; 0)$

$N(2; n)$ $\quad$ $M(-2; 0)$

Phương trình đường thẳng A_1N: $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y}{n} \Leftrightarrow nx - 4y + 2n = 0$.

Phương trình đường thẳng A_2M: $\dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y}{m} \Leftrightarrow mx + 4y - 2m = 0$.

Phương trình đường thẳng MN:

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-m}{n-m} \Leftrightarrow (n-m)x - 4y + 2(m+n) = 0.$$

Tọa độ giao điểm I của A_1N và A_2N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} mx - 4y = -2n \\ mx + 4y = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-8(n-m)}{4(m+n)} = \dfrac{-2(n-m)}{m+n} \\ y = \dfrac{4mn}{4(m+n)} = \dfrac{m.n}{m+n} \end{cases}$$

$$I\left(\frac{2(m-n)}{m+n}; \frac{m.n}{m+n}\right).$$

b. MN tiếp xúc (E) $\Leftrightarrow (n-m)^2.4 + (-4)^2.1 = 4(m+n)^2$

$\Leftrightarrow (m = n)^2 - (m-n)^2 = 1$

$\Leftrightarrow m.n = 1$

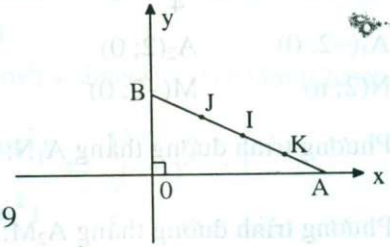
Từ các tọa độ của I:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2(m-n)}{m+n} \\ y = \dfrac{1}{m+n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{m-n}{m+n} \\ y = \dfrac{1}{m+n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{m^2-2mn+n^2}{(m+n)^2} \\ 4y^2 = \dfrac{4mn}{(m+n)^2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + 4y^2 = \dfrac{(m+n)^2}{(m+n)^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$ là phương trình tập hợp các điểm I.

Bài 207. Trong mặt phẳng (Oxy) cho một đoạn AB có độ dài bằng 3 di động sao cho A chạy trên x'Ox, B chạy trên y'Oy. Gọi I là trung điểm AB. Các điểm J, K thuộc đoạn AB với: $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{JB}$, $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{KB}$. Tìm quỹ tích các điểm I, J, K.

Giải



- Tam giác OAB vuông tại O, $OI = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{3}{2}$

  $\Rightarrow$ quĩ tích điểm I là đường tròn tâm O,

bán kính $OI = \dfrac{3}{2}$: $x^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}$

- Gọi A(a; 0); B(0; b) thì $AB = 3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 9$

  Phương trình đường thẳng AB: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \Rightarrow y = \dfrac{b}{a}(a - x)$

  Gọi $J\left(x; \dfrac{b}{a}(a-x)\right)$ thì $\overrightarrow{AJ} = \left(x - a; \dfrac{b}{a}(a-x)\right)$

  $2\overrightarrow{JB} = \left(-2x; \dfrac{2b}{a}x\right)$

  $$\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{JB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - a = -2x \\ \dfrac{b}{a}(a-x) = \dfrac{2b}{a}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{3} \\ y = \dfrac{2b}{3} \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = a \\ \dfrac{3}{2}y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 = a^2 \\ \dfrac{9}{4}y^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow 9x^2 + \dfrac{9}{4}y^2 = a^2 + b^2 = 9$$

  $\Leftrightarrow x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ là phương trình quĩ tích điểm J.

- Gọi $K\left(x;\frac{b}{a}(a-x)\right)$

$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{KB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{KB}$

$\overrightarrow{AK}=\left(x-a;\frac{b}{a}(a-x)\right)\Rightarrow 2\overrightarrow{AK}=\left(2x-2a;\frac{2b}{a}(a-x)\right)$

$\overrightarrow{KB}=\left(-x;b-\frac{b}{a}(x-a)\right)=\left(-x;\frac{b}{a}x\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2a=-x\\ \frac{2b}{a}(a-x)=\frac{b}{a}x\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2a}{3}\Rightarrow y=\frac{b}{3}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2a}{3}\\ y=\frac{b}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3x}{2}=a\\ 3y=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{9x^2}{5}=a^2\\ 9y^2=b^2\end{cases}\Leftrightarrow\frac{9x^2}{4}+9y^2=9$$

$\Leftrightarrow\frac{x^2}{4}+y^2=1$ là phương trình quĩ tích điểm K.

Bài 208. Cho 2 điểm A(–3; 0), B(3; 0). Hai điểm C, D di động sao cho ABCD là hình thang với CD = 2 và AD + BC = AB. Tìm quĩ tích của:

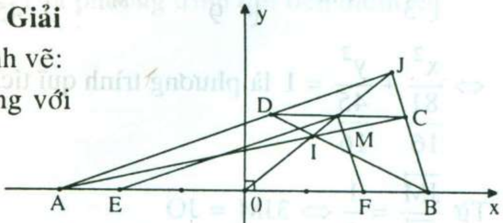
a. Trung điểm M của đoạn CD.

b. Đỉnh C.

c. Giao điểm I của hai đường chéo AC và BD.

d. Giao điểm J của hai đường thẳng AD và BC.

Giải



Hình thang ABCD có vị trí như hình vẽ:

a. Từ M, kẻ 2 đường thẳng song song với AD và BC, cắt AB tại E và F.

MDAE là hình bình hành

$\Rightarrow AE=DM=1\Rightarrow E(-2;0)$

BCMF là hình bình hành

$\Rightarrow MC=BF=1\Rightarrow F(2;0)$

AB + CD = ME + MF = AB = 6 ⇒ Tập hợp điểm M là elip (E_1) có tâm O, trục lớn 2a = 6 ⇒ a = 3. Tiêu cự 2c = EF = 4 ⇒ c = 2 ⇒ $b^2=a^2-c^2=3^2-2^2=5$

⇒ Qũi tích điểm M là elip (E): $\frac{x^2}{9}=\frac{y^2}{5}=1$.

b. Tịnh tiến điểm M theo vectơ $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FB}=(1;0)$ sẽ được điểm C

Từ công thức của phép tịnh tiến: $\begin{cases} x - 1 = X \\ y = Y \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm C cũng là elip (E$_2$): $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

c. Gọi $M(x_M; y_M) \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{x_M^2}{9} + \dfrac{y_M^2}{5} = 1$

Theo định lí Thales đảo thì I, M, J, O thẳng hàng và $\dfrac{IM}{IO} = \dfrac{JM}{JO} = \dfrac{MC}{OB} = \dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{IM}}{\overrightarrow{IO}} = -\frac{1}{3} \text{ và } \frac{\overrightarrow{JM}}{JO} = \frac{1}{3}$$

- Từ $\dfrac{\overrightarrow{IM}}{\overrightarrow{IO}} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow 3\overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{OI}$

Gọi I(x; y): $\overrightarrow{IM} = (x_M - x; y_M - y) \Rightarrow 3\overrightarrow{IM} = \left(3x_M - 3x; 3y_M - 3y\right)$

$$\overrightarrow{OI} = (x; y)$$

$$3\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_M - 3x = x \\ 3y_M - 3y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3x_M}{4} \\ y = \dfrac{3y_M}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x}{3} = x_M \\ \dfrac{4y}{3} = y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{16x^2}{9} = x_M^2 \\ \dfrac{16y^2}{9} = y_M^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{16x^2}{81} = \dfrac{x_M^2}{9} \\ \dfrac{16y^2}{45} = \dfrac{y_M^2}{5} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{81}{16}} + \dfrac{y^2}{\frac{45}{16}} = 1$ là phương trình quĩ tích điểm I

d. Từ $\dfrac{\overrightarrow{JM}}{\overrightarrow{JO}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{JO}$

Gọi J(x; y). $\overrightarrow{JM} = \left(x_M - x; y_M - y\right) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{JM} = \left(3x_M - 3x; 3y_M - 3y\right)$

$$\overrightarrow{JO} = (-x; -y)$$

$$3\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{JO} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_M - 3x = -x \\ 3y_M - 3y = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}x_M \\ y = \dfrac{3}{2}y_M \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{2}{3}x = x_M\\[4pt] \dfrac{2}{3}y = y_M\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{4}{9}x^2 = x_M^2\\[4pt] \dfrac{4}{5}y^2 = y_M^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{4}{81}x^2 = \dfrac{x_M^2}{9}\\[4pt] \dfrac{4}{45}y^2 = \dfrac{y_M^2}{5}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{81}x^2 + \dfrac{4}{45}y^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{81}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{45}{4}} = 1$ là phương trình quĩ tích điểm J.

Bài 209. Cho hai điểm A(–a; 0), B(a; 0) (a là hằng số dương) và hằng số $k(k \neq 0, k \neq 1)$. Tìm quĩ tích những điểm M sao cho:

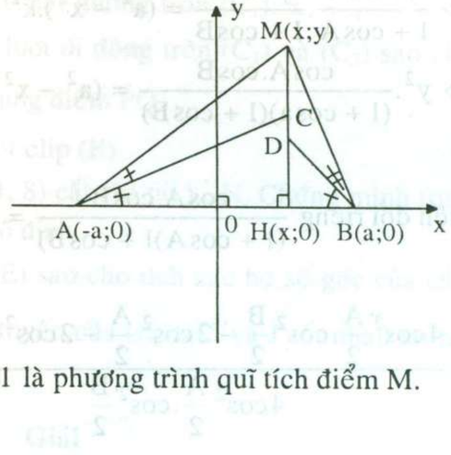
a. Tam giác AMB có $\tan A.\tan B = k^2$.

b. Tích các hệ số góc của các đường thẳng AM và BM = $-k^2$.

c. Tam giác AMB có $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2} = k^2$.

Giải

Xem hình vẽ:



a. $\tan A = \dfrac{MH}{AH} = \dfrac{y}{a + x}$

$\tan B = \dfrac{MH}{HB} = \dfrac{y}{a - x}$

$\tan A.\tan B = \dfrac{y}{a - x}.\dfrac{y}{a + x} = k^2$

$\Leftrightarrow y^2 = k^2a^2 - k^2x^2$

$\Leftrightarrow k^2x^2 + y^2 = k^2a^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{k^2a^2} = 1$ là phương trình quĩ tích điểm M.

b. $\overrightarrow{AM} = (x + a; y) \Rightarrow k_{AM} = \dfrac{y}{x + a}$

$\overrightarrow{BM} = (x - a; y) \Rightarrow k_{BM} = \dfrac{y}{x - a}$

$k_{AM}.k_{BM} = -k^2 \Leftrightarrow \dfrac{y}{a + x}.\dfrac{y}{x - a} = -k^2 \Leftrightarrow y^2 = -k^2(x^2 - a^2)$

$\Leftrightarrow y^2 = -k^2x^2 + k^2a^2 \Leftrightarrow k^2x^2 + y^2 = k^2a^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{k^2a^2} = 1$ là phương trình quĩ tích điểm M.

c. Gọi C là chân phân giác trong góc A trên MH, D là chân phân giác trong góc B trên MH.

C(x; c), D(x; d)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{HC}=(0;c)\\ \overrightarrow{CM}=(0;y-c)\end{array}\right\}\frac{\overrightarrow{HC}}{\overrightarrow{CM}}=\frac{AH}{AM}=\cos A\Leftrightarrow \overrightarrow{HC}=\overrightarrow{CM}.\cos A$$

$$\Leftrightarrow (0;c)=\big(0;(y-c)\cos A\big)$$

$$\Leftrightarrow c=y\cos A-c\cos A\Leftrightarrow c(1+\cos A)=y\cos A\Leftrightarrow c=\frac{y\cos A}{1+\cos A}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{HD}=(0;d)\\ \overrightarrow{DM}=(0;y-d)\end{array}\right\}\frac{\overrightarrow{HD}}{\overrightarrow{DM}}=\frac{BH}{BM}=\cos B\Leftrightarrow \overrightarrow{HD}=\overrightarrow{DM}.\cos B$$

$$\Leftrightarrow (0;d)=(0;(y-d).\cos B)$$

$$\Leftrightarrow d=y\cos B-d\cos B\Leftrightarrow d(1+\cos B)=y\cos B\Leftrightarrow d=\frac{y\cos B}{1+\cos B}$$

- $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{CH}{AH}.\dfrac{DH}{BH}=\dfrac{c}{a+x}.\dfrac{d}{a-x}=k^2\Leftrightarrow c.d=(a^2-x^2)k^2$

$$\Leftrightarrow \frac{y.\cos A}{1+\cos A}.\frac{y.\cos B}{1+\cos B}=(a^2-x^2).k^2$$

$$\Leftrightarrow y^2.\frac{\cos A.\cos B}{(1+\cos a)(1+\cos B)}=(a^2-x^2)k^2 \qquad (*)$$

Biến đổi riêng $\dfrac{\cos A.\cos B}{(1+\cos A)1+\cos B)}=\dfrac{\left(2\cos^2\dfrac{A}{2}-1\right)\left(2\cos^2\dfrac{B}{2}-1\right)}{2\cos^2\dfrac{A}{2}.2\cos^2\dfrac{B}{2}}$

$$=\frac{4\cos^2\frac{A}{2}.\cos^2\frac{B}{2}-2\cos^2\frac{A}{2}-2\cos^2\frac{B}{2}+1}{4\cos^2\frac{A}{2}.\cos^2\frac{B}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{2\cos^2\frac{A}{2}}-\frac{1}{2\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{2\cos^2\frac{A}{2}}.\frac{1}{2\cos^2\frac{B}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{2}\left[1+\tan^2\frac{A}{2}+1+\tan^2\frac{B}{2}-\left(1+\tan^2\frac{A}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$=1-\frac{1}{2}\left[1+\tan^2\frac{A}{2}+1+\tan^2\frac{B}{2}-1-\tan^2\frac{A}{2}-\tan^2\frac{B}{2}-\tan^2\frac{A}{2}.\tan^2\frac{B}{2}\right]$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(1-\tan^2\frac{A}{2}.\tan^2\frac{B}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tan^2\frac{A}{2}.\tan^2\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\left(1+k^4\right)$$

$$(*)\Leftrightarrow y^2.\frac{1}{2}(1+k^4)=(a^2-x^2)k^2$$

$$\Leftrightarrow\ y^2(1+k^4) = 2a^2k^2 - 2x^2.k^2 \Leftrightarrow 2x^2k^2 + y^2(1+k^4) = 2a^2k^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2k^2 + y^2(1+k^4) = 2a^2k^2 \Leftrightarrow \frac{2a^2k^2}{2a^2k^2} + \frac{y^2(1+k^4)}{2a^2k^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\dfrac{2a^2k^2}{1+k^4}} = 1$$

Đây là phương trình quĩ tích điểm M.

$$= \frac{-72k^2 - 16k + 72k^2 + 32}{9k^2+4} = \frac{-16k+32}{9k^2+4} \quad (2)$$

♦ Lời bình: Đây là một bài tập không dễ (có thể biết cách làm mà không làm được!). Các em học sinh tham khảo lời giải bài tập này cần lưu ý về kĩ thuật tính toán và khử các tham số, sử dụng các công thức lượng giác để làm gọn dần các kết quả tính toán.

Bài 210. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 = 25$ và (C_2): $x^2 + y^2 = 1$. Các điểm P và Q lần lượt di động trên (C_1) và (C_2) sao cho Ox là tia phân giác của $\widehat{POQ}$. Gọi M là trung điểm PQ.

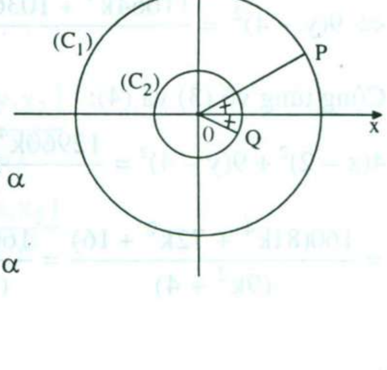
a. Chứng minh quĩ tích của M là một elip (E).

b. Đường thẳng Δ lưu động qua A(4; 8) cắt (E) tại L, N. Chứng minh trung điểm K của đoạn LN chạy trên một elip cố định.

c. Các điểm I, J di động trên elip (E) sao cho tích các hệ số góc của các đường thẳng OI và OJ bằng $-\frac{4}{9}$. Các tiếp tuyến của (E) tại I và J cắt nhau tại S. Chứng minh S chạy trên một elip cố định.

Giải

(Xem hình vẽ)



a. Gọi $\widehat{xOP} = \alpha \Rightarrow \widehat{xOQ} = -\alpha$

$\Rightarrow P(5\cos x; 5\sin\alpha)$

$Q(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha)) \Rightarrow Q(\cos\alpha; -\sin\alpha)$

M là trung điểm PQ thì M(3cosα; 2sinα)

$$\begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \cos\alpha \\ \dfrac{y}{2} = \sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} = \cos^2\alpha \\ \dfrac{y^2}{4} = \sin^2\alpha \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ là phương trình quĩ tích điểm M.

b. (E): $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

Phương trình Δ: $y = k(x - 4) + 8 = kx + 8 - 4k$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (E):

$4x^2 + 9(kx - 4k + 8)^2 - 36 = 0$

$\Leftrightarrow (9k^2 + 4)x^2 - 72k(k - 2)x + 144k^2 - 576k + 540 = 0.$

Gọi K(x; y) thì $x = \dfrac{36k^2 - 72k}{9k^2 + 4}$ (1)

$$y = k\left(\dfrac{36k^2 - 72k}{9k^2 + 4}\right) + 8 - 4k = \dfrac{36k^3 - 72k^2 - 36k^3 - 16k}{9k + 4} + 8$$

$$= \dfrac{-72k^2 - 16k + 72k^2 + 32}{9k^2 + 4} = \dfrac{-16k + 32}{9k^2 + 4} \qquad (2)$$

- Khử k: Từ (1)

$$\Leftrightarrow x - 2 = \dfrac{18k^2 - 72k - 8}{9k^2 + 4}$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 = \dfrac{324k^4 - 2592k^3 + 4896k^2 + 1152k + 64}{(9k^2 + 4)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x - 2)^2 = \dfrac{1296k^4 - 10368k^3 + 19584k^2 + 4608k + 256}{(9k^2 + 4)^2} \qquad (3)$$

Từ (2) $\Rightarrow y - 4 = \dfrac{-36k^2 - 16k + 16}{9k^2 + 4}$

$$\Rightarrow (y - 4)^2 = \dfrac{1296k^4 + 1152k^3 - 896k^2 - 512k + 256}{(9k^2 + 4)^2}$$

$$\Leftrightarrow 9(y - 4)^2 = \dfrac{11664k^4 + 10368k^3 - 8064k^2 - 4608k + 2304}{(9k^2 + 4)^2} \qquad (4)$$

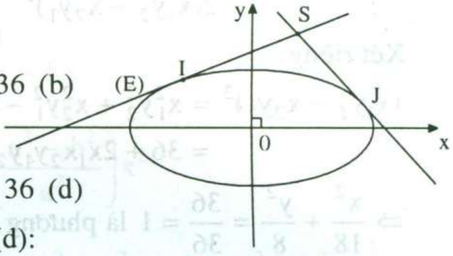
Cộng từng vế (3) và (4):

$$4(x - 2)^2 + 9(y - 4)^2 = \dfrac{12960k^4 + 11520k^2 + 2560}{(9k^2 + 4)^2}$$

$$= \dfrac{160(81k^4 + 72k^2 + 16)}{(9k^2 + 4)} = \dfrac{160(9k^2 + 4)^2}{(9k^2 + 4)^2} = 160$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{40} + \frac{(y-4)^2}{\frac{160}{9}} = 1.$$

$\Rightarrow$ K di động trên môt elip cố định.



c. Gọi I(x_1; y_1) thì $4x_1^2 + 9y_1^2 = 36$ (a)

Tiếp tuyến của (E) tại I: $4x_1x + 9y_1y = 36$ (b)

J(x_2; y_2) thì $4x_2^2 + 9y_2^2 = 36$ (c)

Tiếp tuyến của (E) tại J: $4x_2x + 9y_2y = 36$ (d)

Tọa độ điểm S là nghiệm của hệ (b) và (d):

$$\begin{cases} 4x_1x + 9y_1y = 36 \\ 4x_2x + 9y_2y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9(y_2 - y_1)}{x_1y_2 - x_2y_1} \\ y = \dfrac{4(x_1 - x_2)}{x_1y_2 - x_2y_1} \end{cases}$$

Tiếp tuyến tại I có hệ số góc $k_1 = -\dfrac{4x_1}{9y_1}$

Tiếp tuyến tại J có hệ số góc $k_2 = -\dfrac{4x_2}{9y_2}$

$$k_1.k_2 = -\frac{4}{9} \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{9}\right).\frac{x_1}{y_1}.\left(-\frac{4}{9}\right).\frac{x_2}{y_2} = -\frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{x_1x_2}{y_1y_2} = -\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x_1x_2 + 9y_1y_2 = 0 \qquad (*)$$

Nhân từng vế (a) và (c):

$$16x_1^2x_2^2 + 81y_1^2y_2^2 + 36\left(x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2\right) = 36^2$$

$$\Leftrightarrow (4x_1x_2 + 9y_1y_2)^2 - 72x_1x_2y_1y_2 + 36(x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2) = 36^2$$

$$= 0 + 36(x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2) = 36^2 + 72x_1x_2y_1y_2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 = 36 + 2x_1x_2y_1y_2 \qquad (*')$$

- Từ các tọa độ của S:

$$\begin{cases} x = \dfrac{9(y_2 - y_1)}{x_1x_2 - x_2y_1} \\ y = \dfrac{4(x_1 - x_2)}{x_1y_2 - x_2y_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{18} = \dfrac{9\left(y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2\right)}{2(x_1y_2 - x_2y_1)^2} \\ \dfrac{y^2}{8} = \dfrac{4(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)}{2(x_1y_2 - x_2y_1)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=\frac{4(x_1^2+9y_1^2)+(4x_2^2+9y_2^2)-2(4x_1x_2+9y_1y_2)}{2(x_1y_2-x_2y_1)^2}$$

$$=\frac{36+36}{2(x_1y_2-x_2y_1)^2}=\frac{36}{(x_1y_2-x_2y_1)^2}$$

Xét riêng:

$(x_1y_2-x_2y_1)^2=x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-2x_1x_2y_1y_2$. Thay theo (*')

$$=36+2x_1x_2y_1y_2-2x_1x_2y_1y_2=36$$

$\Rightarrow \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=\frac{36}{36}=1$ là phương trình quĩ tích điểm S.

Dạng bài tập tổng hợp. Chứng minh các tính chất hình học của elip

Bài 211. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ có hai tiêu điểm F_1, F_2. Các đỉnh trên trục lớn là, A_1, A_2, các đỉnh trên trục nhỏ là B_1, B_2. Điểm $M\in(E)$ có hình chiếu vuông góc trên trục lớn là P, trên trục nhỏ là Q. Chứng minh:

a. $b\le OM\le a$ (0 là gốc tọa độ).

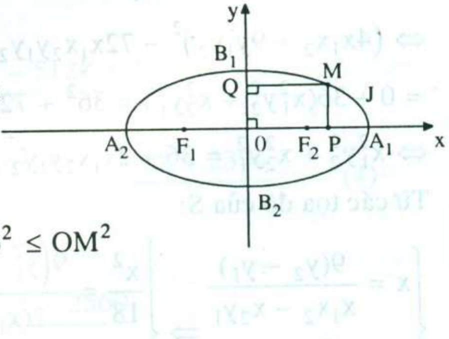
b. $F_1M.F_2M+OM^2=a^2+b^2$.

c. $(F_1M-F_2M)^2=4(OM^2-b^2)$.

d. $PM^2=-\frac{b^2}{a^2}.\overline{PA_1}.\overline{PA_2}$.

e. $QM^2=-\frac{a^2}{b^2}.\overline{QB_1}.\overline{QB_2}$.

Giải



a. Từ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ do $b<a$

$\Rightarrow x^2+y^2\le a^2\Leftrightarrow OM^2\le a^2\Leftrightarrow OM\le a$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow 1\le\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}\Leftrightarrow b^2\le x^2+y^2\Leftrightarrow b^2\le OM^2$$

$\Leftrightarrow b\le OM\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

b. $$\left.\begin{array}{l}F_1M=a+\frac{c}{a}x\\ F_2M=a-\frac{c}{a}x\end{array}\right\}\Rightarrow F_1M.F_2M=a^2-\frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$\Rightarrow F_1M.F_2M + OM^2 = a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 + x^2 + y^2$$

$$= a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$$= a^2 - x^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 + x^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = a^2 + b^2.$$

c. $(F_1M - F_2M)^2 = \left(\frac{2c}{a}x\right)^2 = 4\frac{c^2}{a^2}x^2 = 4\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)x^2$

$$= 4\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 = 4\left(x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right) = 4(x^2 + y^2 - b^2) = 4(OM^2 - b^2).$$

d. Lưu ý qua hình vẽ: $PM = |y|$

$\overline{PA_1} = (a - x)$; $\overline{PA_2} = (-a - x) \Rightarrow \overline{PA_1}.\overline{PA_2} = -(a^2 - x^2)$

$$PM^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{b^2}{a^2}(a - x)(a + x) = -\frac{b^2}{a^2}.\overline{PA_1}.\overline{PA_2}$$

e. $QM = |x|$

$\overline{QB_1} = b - y$; $\overline{QB_2} = -b - y \Rightarrow \overline{QB_1}.\overline{QB_2} = -(b^2 - y^2)$

$$QM^2 = x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) = \frac{a^2}{b^2}(b - y)(b + y) = -\frac{a^2}{b^2}.\overline{QB_1}.\overline{QB_2}$$

Bài 212. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, các đỉnh trên trục lớn là A_1, A_2, các đỉnh trên trục nhỏ là B_1, B_2; d là một tiếp tuyến từng ý của (E)

a. d cắt các tiếp tuyến A_1m_1, A_2m_2 của (E) tại M_1, M_2.

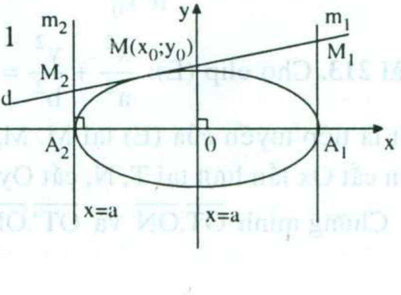
Chứng minh $\overline{A_1M_1}.\overline{A_2.M_2} = b^2$.

b. d cắt các tiếp tuyến B_1n_1, B_2n_2 của (E) tại N_1, N_2.

Chứng minh $\overline{B_1N_1}.\overline{B_2N_2} = a^2$.

Giải

a. Xem hình vẽ: Phương trình d: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$



Tọa độ M_1 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = a \\ \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow M_1\left(a; \frac{b^2}{ay_0}(a - x_0)\right)$$

Tọa độ M_2 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -a \\ \dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow M_2\left(-a; \frac{b^2}{ay_0}(a + x_0)\right)$$

$$\Rightarrow \overline{A_1M_1} = \frac{b^2}{ay_0}(a - x_0)$$

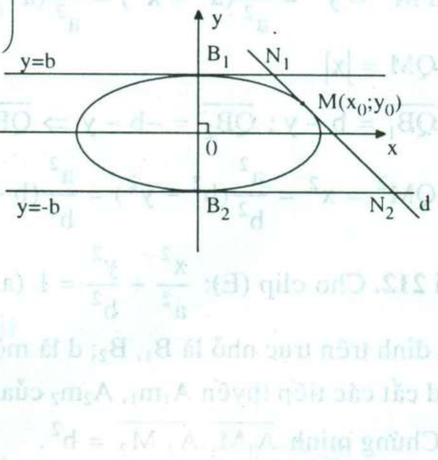
$$\overrightarrow{A_2M_2} = \frac{b^2}{ay_0}(a + x_0)$$

$$\Rightarrow \overline{A_1M_1}.\overline{A_2M_2} = \frac{b^2}{ay_0^2}(a^2 - x_0^2) = b^2.\frac{1}{y_0^2}.\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2) = b^2.\frac{y_0^2}{y_0^2} = b^2$$

b. Phương trình d: $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$

Tọa độ N_1 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = b \\ \dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow N_1\left(\frac{a^2}{bx_0}(b - y_0); b\right)$$



Tọa độ N_2 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = -b \\ \dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow N_2\left(\frac{a^2}{bx_0}(b + y_0; -b)\right)$$

$$\overline{B_1N_1} = \frac{a^2}{bx_0}(b - x_0)$$

$$\overline{B_2N_2} = \frac{a^2}{bx_0}(b + y_0)$$

$$\Rightarrow \overline{B_1N_1}.\overline{B_2N_2} = \frac{a^4}{b^2x_0^2}(b^2 - y_0^2) = a^2.\frac{1}{x_0^2}.\frac{a^2}{b^2}(b^2 - y_0^2) = a^2.\frac{1}{x_0^2}.x_0^2 = a^2$$

Bài 213. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ $M(x_0; y_0) \in (E)$ $(x_0.y_0 \neq 0)$. Gọi Mt là tiếp tuyến của (E) tại M. M_n là đường thẳng vuông góc với Mt tại M. Mt, Mn cắt Ox lần lượt tại T, N, cắt Oy lần lượt tại T', N'.

a. Chứng minh $\overline{OT}.\overline{ON}$ và $\overline{OT'}.\overline{ON'}$ không đổi.

b. Chứng minh đường tròn đường kính T'N' qua hai tiêu điểm của (E).

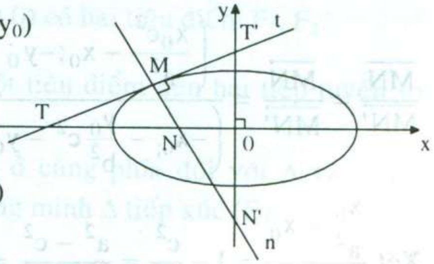
c. Chứng minh $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{MN'}}$ không đổi.

Giải

a. Phương trình tiếp tuyến Mt: $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

Vì Mn vuông góc với Mt nên phương trình Mn có dạng:

$\dfrac{y_0}{b^2}x-\dfrac{x_0}{a^2}y+C=0$. Mn đi qua M(x₀; y₀)



$\Leftrightarrow \dfrac{x_0y_0}{b^2}-\dfrac{x_0y_0}{a^2}+C=0$

$\Leftrightarrow C=\dfrac{x_0y_0}{a^2}-\dfrac{x_0y_0}{b^2}=\dfrac{x_0y_0}{a^2b^2}(b^2-a^2)$

$=-\dfrac{x_0y_0}{a^2b^2}.c^2$

Phương trình Mn: $\dfrac{y_0}{b^2}x-\dfrac{x_0}{a^2}y-\dfrac{x_0y_0}{a^2b^2}x^2=0$

- Mt cắt Ox tại $T\left(\dfrac{a^2}{x_0};0\right)$, cắt Oy tại $T'\left(0;\dfrac{b^2}{y_0}\right)$
- Mn cắt Ox tại $N\left(\dfrac{x_0}{a^2}c^2;0\right)$, cắt Oy tại $N'\left(0;\dfrac{-y_0}{b^2}.c^2\right)$

$\overline{OT}.\overline{ON}=\dfrac{a^2}{x_0}.\dfrac{x_0}{a^2}.c^2=C^2$

$\overline{OT'}.\overline{ON'}=\dfrac{b^2}{y_0}\left(-\dfrac{y_0}{b^2}\right).c^2=-C^2$

b. $F_1(-c;0)$; $F_2(c;0)$

Gọi I là trung điểm T'N': $I\left(0;\dfrac{\dfrac{b^2}{y_0}-\dfrac{y_0}{b^2}c^2}{2}\right)$

$T'N'=\left|\dfrac{b^2}{y_0}+\dfrac{y_0}{b^2}c^2\right|$

$$IF_1 = IF_2 = \sqrt{c^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{b^4}{y_0^2} + \frac{y_0^2c^4}{b^4} - 2c^2\right)} = \sqrt{\frac{\frac{b^4}{y_0^2} + \frac{y_0^2c^4}{b^4} + 2c^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{b^2}{y_0} + \frac{y_0c^2}{b^2}\right)^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{b^2}{y_0} + \frac{y_0c^2}{b^2}\right| = \frac{1}{2}T'N' \Rightarrow \text{điều phải chứng minh.}$$

c. Vì M, N, N’ thẳng hàng nên

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{MN'}} = \frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{MN'}} = \frac{\left(\frac{x_0c^2}{a^2} - x_0; -y_0\right)}{\left(-x_0; -\frac{y_0}{b^2}c^2 - y_0\right)}$$

Xét $\dfrac{\frac{x_0}{a^2} - x_0}{-x_0} = 1 - \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - c^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a^2}$

$$\frac{-y_0}{-\frac{y_0}{b^2}c^2 - y_0} = \frac{1}{\frac{c^2}{b^2} + 1} = \frac{1}{\frac{a^2 - b^2 + b^2}{b^2}} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{\overline{MN}}{\overline{MN'}} = \frac{b^2}{a^2}$$

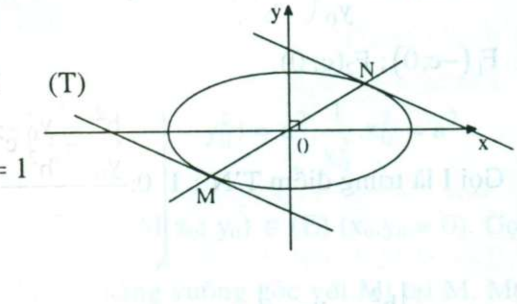
Bài 214. a. Một đường thẳng qua tâm elip tại M, N. Chứng minh các tiếp tuyến của elip tại M và N song song với nhau.

b. Chứng minh nếu hai tiếp tuyến của elip song song với nhau thì hai tiếp điểm đối xứng nhau qua tâm elip.

Giải

Giả sử elip có phương trình: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

a. Nếu $M(x_0; y_0)$ thì $N(-x_0; -y_0)$



Tiếp tuyến tại M: $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$ (T)

Tiếp tuyến tại N: $\dfrac{-x_0x}{a^2} + \dfrac{-y_0y}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = -1$ (T’)

$\Rightarrow$ (T) // (T’)

b. Gọi T_1 là tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ phương trình (T_1): $Ax + By + C = 0$, T_2 là tiếp tuyến song song với T, phương trình T_2: $Ax + By + C' = 0$ $(C' \neq C)$

$$\left.\begin{array}{l}(T1)\text{ tiếp xúc (E)}: A^2a^2+B^2b^2=C^2\\ (T_2)\text{ tiếp xúc (E)}: A^2a^2+B^2b^2=C'^2\end{array}\right\}\Rightarrow C^2=C'^2\Rightarrow C'=-C$$

(T_2): $Ax + By - C = 0$

$M(x_0; y_0) \in (T_1) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + C = 0 \Leftrightarrow -Ax_0 - By_0 - C = 0$ (*)

(*) Chứng tỏ điểm $M'(-x_0;-y_0)$ thỏa (T_2) ⇔ Hai tiếp điểm M và M' đối xứng nhau qua tâm O của elip.

Bài 215. Cho elip (E); $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b > 0)$ có hai tiêu điểm F_1, F_2.

a. Chứng minh tích các khoảng cách từ một tiêu điểm đến hai tiếp tuyến song song của (E) là một hằng số.

b. Đường thẳng Δ di động sao cho F_1, F_2 ở cùng phía đối với Δ và tích các khoảng cách từ F_1 và F_2 đến Δ bằng b^2. Chứng minh Δ tiếp xúc (E).

Giải

a. Tiếp tuyến (T_1) tại $M(x_0; y_0)$: $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0$

Tiếp tuyến (T_2) tại $M'(-x_0;-y_0)$: $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+1=0$

Chọn tiêu điểm $F_1(-c;0)$

$$d\left(F_1,(T_1)\right)=\frac{\left|-\frac{cx_0}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}=d_1$$

$$d\left(F_1,(T_2)\right)=\frac{\left|-\frac{cx_0}{a^2}+1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}=d_2$$

$$\Rightarrow d_1.d_2=\frac{\left|1-\frac{c^2x_0^2}{a^4}\right|}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}$$

- Tính riêng $\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}=\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{1}{b^4}-\frac{x_0^2}{a^2b^2}.\left(\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)$

$$= \frac{1}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2}\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2b^2}\right) = \frac{1}{b^2} - \frac{c^2x_0^2}{a^4b^2} = \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{c^2x_0^2}{a^4}\right)$$

$$\Rightarrow d_1.d_2 = \frac{\left|1 - \dfrac{c^2x_0^4}{a^4}\right|}{\dfrac{1}{b^2}\left(1 - \dfrac{c^2x_0^2}{a^4}\right)} = b^4$$

b. Giả sử Δ có phương trình $Ax + By + C = 0$; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$

$$d(F_1;\Delta) = \frac{|-A.c + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}};\ d\left(F_2;\Delta\right) = \frac{|A.c + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d(F_1;\Delta).d\left(F_2;\Delta\right) = \frac{\left|C^2 - A^2c^2\right|}{A^2 + B^2} = b^2$$

$\Rightarrow C^2 - A^2c^2 = A^2b^2 + B^2b^2 \Rightarrow C^2 = A^2(b^2 + c^2) + B^2b^2 = A^2a^2 + B^2b^2$

$\Leftrightarrow \Delta$ tiếp xúc (E).

Bài 216. Cho elip (E): $4x^2 + 9y^2 = 36$ và điểm $M(1;\ 1)$. Đường thẳng d qua M cắt (E) tại P, Q.

a. Xác định d để MP = MQ.

b. Gọi N là trung điểm PQ. Chứng minh khi d quay quanh điểm M, điểm N chạy trên một elip cố định.

Giải

a. Phương trình d có dạng: $y = k(x - 1) + 1 = kx - k + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (E):

$4x^2 + 9(kx - k + 1)^2 - 36 = 0$

$\Leftrightarrow (9k^2 + 4)x^2 - 2.9(k^2 - k)x + 9k^2 - 18k - 27 = 0$

Do $M(1;\ 1)$ nằm bên trong (E) nên phương trình này chắc chắn có hai nghiệm phân biệt: x_P, x_Q và $x_P + x_Q = \dfrac{2(9k^2 - 9k)}{9k^2 + 4}$

Để MP = MQ thì $\dfrac{x_P + x_Q}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{9k^2 - 9k}{9k^2 + 4} = 1 \Leftrightarrow 9k^2 - 9k = 9k^2 + 4$

$\Leftrightarrow k = -\dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow$ Phương trình d: $y = -\dfrac{4}{9}x + \dfrac{4}{9} + 1 = -\dfrac{4}{9}x + \dfrac{13}{9}$.

b. Gọi N(x; y) là trung điểm PQ thì:

$$x = \frac{9k^2 - 9k}{9k^2 + 4}\ ;\ y = k\left(\frac{9k^2 - 9k}{9k^2 + 4}\right) - k + 1 = \frac{-4k + 4}{9k^2 + 4}$$

- Khử tham số k:

$$x - \frac{1}{2} = \frac{9k^2 - 9k}{9k^2 + 4} - \frac{1}{2} = \frac{9k^2 - 18k - 4}{2(9k^2 + 4)}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81k^4 - 324k^2 + 252k^2 + 144k + 16}{4(9k^2 + 4)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{13}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1296k^4 - 5184k^3 + 4032k^2 + 2304k + 256}{13.4(9k^2 + 4)^2} \qquad (1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{-4k + 4}{9k^2 + 4} - \frac{1}{2} = \frac{-9k^2 - 8k + 4}{2(9k^2 + 4)}$$

$$\Rightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81k^2 + 144k^3 - 8k^2 - 64k + 16}{4(9k^2 + 4)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{36}{13}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2916k^4 + 5184k^3 - 288k^2 - 2304k + 576}{13.4(9k^2 + 4)^2} \qquad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2):

$$\frac{16}{13}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{36}{13}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4212k^4 + 3744k^2 + 832}{52(9k^2 + 4)^2}$$

$$= \frac{52(81k^4 + 72k^2 + 16)}{52(9k^2 + 4)^2} = \frac{52(9k^2 + 4)^2}{52(9k^2 + 4)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{13}{16}} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{13}{36}} = 1$$ là phương trình quĩ tích điểm N

$\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Bài 217. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a > b . 0). Góc vuông uOv quay quanh O (O là gốc tọa độ). Ou, Ov cắt (E) tại M, N. Đặt (Ox, Ou) = $\alpha.\left[2\pi\right]$

a. Tính OM theo a, b, α.

b. Chứng minh $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$ không đổi.

c. Chứng minh đường thẳng MN tiếp xúc với một đường tròn cố định.

d. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác OMN và của độ dài đoạn MN.

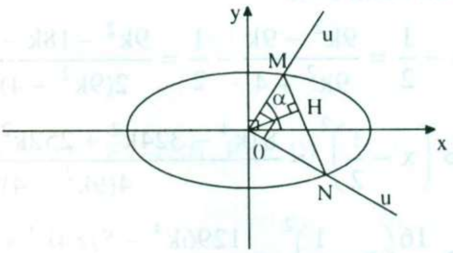
Giải

a. Phương trình đường thẳng Ou: $y = x\tan\alpha$

Gọi $M(x; y)$

Phương trình (E): $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Hệ phương trình cho tọa độ điểm M:



$$\begin{cases} y = x\tan x & (1) \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 & (2) \end{cases}$$

Thế y từ (1) và (2):

$$b^2x^2 + a^2.x^2.\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = a^2b^2 \Leftrightarrow \left(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha\right)x^2 = a^2b^2.\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2b^2\cos^2\alpha}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}, \quad y^2 = \frac{a^2b^2.\sin^2\alpha}{a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow OM^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha} \Rightarrow OM = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}$$

Do (ox, ov) = $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ nên:

$$ON = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + b^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}}$$

b. $$\frac{1}{OM^2} = \frac{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}{a^2b^2}$$

$$\frac{1}{ON^2} = \frac{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}{a^2b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{(a^2 + b^2)\cos^2\alpha + (a^2 + b^2)\sin^2\alpha}{a^2b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \text{đpcm}$$

c. OMN là tam giác vuông tại O. Gọi OH là đoạn vuông góc kẻ từ O xuống MN thì $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow OH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ không đổi}$$

⇒ đường thẳng MN luôn tiếp xúc với đương tròn tâm O, bán kính OH là một đường tròn cố định.

$$S_{OMN} = \frac{1}{2}OM.ON \le \frac{1}{2}\left(\frac{OM^2 + ON^2}{2}\right) \quad (*)$$

$$\frac{OM^2 + ON^2}{OM^2.ON^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} \Rightarrow OM^2 + ON^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}.OM^2.ON^2$$ thay vào (*):

$$OM.ON \le \frac{OM^2 + ON^2}{2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}\frac{1}{2}OM^2.ON^2$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}.\frac{1}{2}OM.ON = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}.S_{OMN}$$

$$\Leftrightarrow S_{OMN} \ge \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

Ngoài ra: $OM \le a$(hoặc b)

$ON \le B$ (hoặc a)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}OM.ON \le \frac{ab}{2} \Rightarrow \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \le S_{OMN} \le \frac{ab}{2}$$

Cũng từ $\left.\begin{matrix} OM \le a \Rightarrow OM^2 \le a^2 \\ ON \le b \Rightarrow ON^2 \le b^2 \end{matrix}\right\} OM^2 + ON^2 \le a^2 + b^2$

$$\Rightarrow MN \le \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ngoài ra $MN^2 = OM^2 + ON^2 \ge 2OM.ON \ge 2.\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}$ (Từ chứng minh trên)

$$MN^2 \ge \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow MN \ge \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vậy: $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \le MN \le \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bài 218. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ có hai tiêu điểm F_1, F_2. Đường thẳng di động d qua tiêu điểm F_2 cắt (E) tại M và N. Đặt $(Ox, F_2M) = (0 \le \alpha \le 2\pi)$.

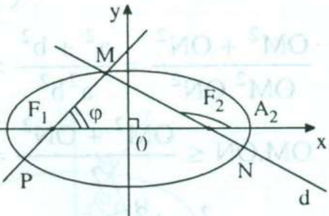
a. Tính F_2M theo a, b, c, α $\left(c = \sqrt{a^2 - b^2}\right)$.

b. Chứng minh $\frac{1}{F_2M} + \frac{1}{F_2N}$ không đổi.

c. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN.

d. Đường thẳng F_1M cắt (E) tại $P(P \ne M)$.

Chứng minh: $\dfrac{F_2M}{F_2N} + \dfrac{F_1M}{F_1P}$ không đổi.



Giải

a. Phương trình d: $y = \tan\alpha(x - c)$

(E): $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (E)

$b^2x^2 + a^2.[\tan\alpha(x - c)]^2 - a^2b^2 = 0$

$\Leftrightarrow (a^2\tan^2\alpha + b^2)x^2 - 2a^2c.\tan^2\alpha.x + a^2c^2\tan^2\alpha - a^2b^2 = 0$

$\Delta' = a^4c^2.\tan^4\alpha - (a^2\tan^2\alpha + b^2)(a^2c^2\tan^2\alpha - a^2b^2)$

$= a^4c^2\tan^4\alpha - ac^2\tan^4\alpha - a^2b^2c^2\tan^2\alpha + a^4b^2\tan^2\alpha + a^2b^4$

$= -a^2b^2(a^2 - b^2)\tan^2\alpha + a^4b^2\tan^2\alpha + a^2b^2$

$= a^2b^4\tan^2\alpha + a^2b^4 = a^2b^4(\tan^2\alpha + 1) = \dfrac{a^2b^4}{\cos^2\alpha}$

$\sqrt{\Delta'} = \dfrac{ab^2}{\cos\alpha}$

$$\Rightarrow x_M = \frac{a^2c\tan^2\alpha - \dfrac{ab^2}{\cos\alpha}}{a^2\tan^2\alpha + b^2} = \frac{a^2\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}.\cos\alpha - ab^2}{\cos\alpha(a^2\tan^2\alpha + b^2)}$$

$$= \frac{a^2.\sin^2\alpha - ab^2\cos\alpha}{\cos^2\alpha(a^2\tan^2\alpha + b^2)} = \frac{a(a.\sin^2\alpha - b^2\cos\alpha)}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow x_N = \frac{a(a.\sin^2\alpha + b^2\cos\alpha)}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow F_2M = a - \frac{c}{a}x_M = a - \frac{c}{a}\frac{a(ac\sin^2\alpha - b^2\cos\alpha)}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{a^3\sin^2\alpha + ab^2\cos^2\alpha - ac^2\sin^2\alpha + cb^2\cos\alpha}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{a\sin^2\alpha(a^2 - c^2) + ab^2\cos^2\alpha + cb^2\cos\alpha}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{ab^2\sin^2\alpha + ab^2\cos^2\alpha + cb^2\cos\alpha}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{ab^2 + cb^2\cos\alpha}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha} = \frac{b^2(a + c.\cos\alpha)}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{b^2(a + c.\cos\alpha)}{a^2 - c^2\cos^2\alpha} = \frac{b^2}{a - c.\cos\alpha}$$

Tương tự: $F_2N = a - \frac{c}{a}x_N = \frac{b^2(a - c.\cos\alpha)}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha} = \frac{b^2}{a + c.\cos\alpha}$.

b. $\frac{1}{F_2M} = \frac{a - c\cos\alpha}{b^2}$; $\frac{1}{F_2N} = \frac{a + c.\cos\alpha}{b^2}$

$$\frac{1}{F_2M} + \frac{1}{F_2N} = \frac{a - c.\cos\alpha}{b^2} + \frac{a + c.\cos\alpha}{b^2} = \frac{2a}{b^2}.$$

c. $F_2M + F_2M \le F_2A_1 + F_2A_2 = A_1A_2 = 2a \Leftrightarrow MN \le 2a$

$MN = F_2M + F_2N \ge 2\sqrt{F_2M.F_2N}$

Do $\frac{1}{F_2M} + \frac{1}{F_2N} = \frac{2a}{b^2} \ge 2\sqrt{\frac{1}{F_2M}.\frac{1}{F_2N}} \Leftrightarrow \sqrt{F_2M.F_2N} \ge \frac{b^2}{a}$

$\Leftrightarrow MN \ge \frac{2b^2}{a}$

Cuối cùng: $\frac{2b^2}{a} \le MN \le 2a$.

d. $\frac{F_2M}{F_2N} = \frac{a + c.\cos\alpha}{a - c.\cos\alpha}$ (1)

Đặt $\widehat{MF_1F_2} = \varphi$ thì $\cos\varphi = \frac{F_1M^2 + F_1F_2^2 - F_2M^2}{2F_1M.F_1F_2} = \frac{F_1M^2 - F_2M^2 + 4c^2}{4c.F_1M}$

$$= \frac{(F_1M + F_2M)(F_1M - F_2M) + 4c^2}{4c.F_1M} = \frac{2a.\frac{2c}{a}x_M + 4c^2}{4c.F_1M}$$

$$= \frac{4c(x_M + c)}{4c.\left(a + \frac{c}{a}x_M\right)} = \frac{x_M + c}{a + \frac{c}{a}x_M} \qquad (2)$$

Thay c bởi −c,; cosα bởi cosφ từ (2)

$$\frac{F_1M}{F_1P} = \frac{a - c.\cos\varphi}{a + c.\cos\varphi} = \frac{a - c\left(\dfrac{c + x_M}{a + \frac{c}{a}x_M}\right)}{a + c.\left(\dfrac{c + x_M}{a + \frac{c}{a}x_M}\right)} = \frac{a^2 + c.x_M - c^2 - cx_M}{a^2 - c.x_M + c^2 + c.x_M}$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2 + 2cx_M} \qquad (3)$$

Thay $x_M = \dfrac{a^2c^2\sin\alpha - ab^2\cos\alpha}{a\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha} = \dfrac{a^2c.\sin^2\alpha - ab^2\cos\alpha}{a^2 - c^2\cos^2\alpha}$ vào (3)

$\Rightarrow \dfrac{F_2M}{F_2N} + \dfrac{F_1M}{F_1P} = \dfrac{2(a^2+c^2)}{b^2}$ (độc giả có thể tự làm).

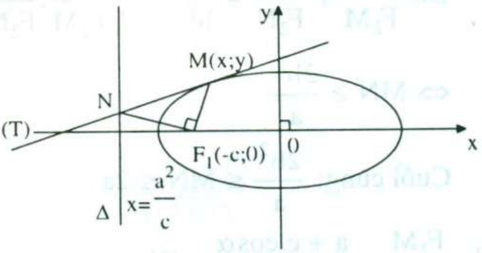
Bài 219. Tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ của elip (E) cắt đường chuẩn Δ của (E) tại N. F là tiêu điểm của (E) ứng với Δ.

Chứng minh F nhìn MN dưới góc 90^0.

Giải

Phương trình (T): $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$

Tọa độ N là nghiệm của hệ:



$$\begin{cases} x = -\dfrac{a^2}{c} \\ \dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{a^2}{c} \\ y = \dfrac{b^2(c+x_0)}{c.y_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N\left(-\frac{a^2}{c}; \frac{b^2(c+x_0)}{cy_0}\right)$$

$$\overrightarrow{F_1N} = \left(-\frac{a^2}{c} + c; \frac{b^2(c+x_0)}{cy_0}\right) = \left(\frac{-(a^2-c^2)}{c}; \frac{b^2(c+x_0)}{cy_0}\right)$$

$= \left(-\dfrac{b^2}{c} + c; \dfrac{b^2(c+x_0)}{c.y_0}\right)$ cùng phương với $\vec{n} = \left(-1; \dfrac{c+x_0}{y_0}\right)$

$$\overrightarrow{F_1M} = (x_0 + c; y_0)$$

$$\overrightarrow{F_1M}.\vec{n} = -x_0 - c + y_0.\frac{c+x_0}{y_0} = -x_0 - c + c + x_0 = 0 \Rightarrow \text{đpcm}.$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP CUỐI CHƯƠNG ELIP

Bài 220. Cho điểm F(1; 0) và đường thẳng Δ: x – 4 = 0.

a. Chứng minh quĩ tích những điểm M trong mặt phẳng tọa độ sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng hai lần khoảng cách từ M đến F là một elip (E).

b. Từ điểm N tùy ý trên Δ kẻ hai tiếp tuyến đến (E) tiếp xúc (E) tại P, Q.

i. Chứng minh đường thẳng PQ đi qua F.

ii. Xác định N sao cho độ dài đoạn PQ nhỏ nhất.

Giải

a. Gọi M(x; y): $d(M; \Delta) = |x - 4|$

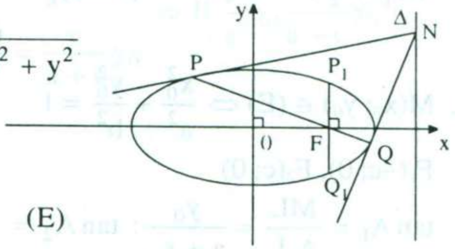
$$MF = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$$

$$D(M, \Delta) = 2FM \Leftrightarrow |x - 4| = 2\sqrt{(1-x)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 4[(1-x)^2 + y^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \qquad (E)$$



b. Xem hình vẽ

i. Gọi N(4; n), $P(x_P; y_P)$, $Q(x_Q; y_Q)$

Phương trình tiếp tuyến T_1 tại P: $\frac{x_P x}{4} + \frac{y_P y}{3} = 1$

Phương trình tiếp tuyến T_2 tại Q: $\frac{x_Q x}{4} + \frac{y_Q y}{3} = 1$

T_1 qua N(4; n): $\frac{x_P.4}{4} + \frac{y_P.4}{3} = 1 \Leftrightarrow x_P + \frac{n}{3}y_P - 1 = 0$

T_2 qua N(4; n): $\frac{x_Q.4}{4} + \frac{y_Q.n}{3} = 1 \Leftrightarrow x_Q + \frac{n}{3}y_Q - 1 = 0$

⇒ Phương trình đường thẳng PQ: $x + \frac{n}{3}y - 1 = 0 \qquad (*)$

Tọa độ F(1; 0) thỏa (*), $\forall n \Leftrightarrow$ PQ luôn đi qua F.

ii. Qua F, kẻ đường thẳng vuông góc với trục lớn của (E), cắt (E) tại P_1, Q_1 thấy ngay $P_1Q_1 \le PQ \Rightarrow$ Khi N(4; 0) thì PQ ngắn nhất.

Bài 221. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Điểm M di động trên (E). Gọi I. J lần lượt là tâm vòng tròn nội tiếp và bàng tiếp ứng với góc M của tam giác F_1MF_2. H, K là hình chiếu của I, J lên trục lớn. Chứng minh:

a. Trong tam giác A_1MA_2 (A_1, A_2 là hai đỉnh trên trục lớn của (E) ta có $\tan A_1.\tan A_2 = \frac{b^2}{a^2}$.

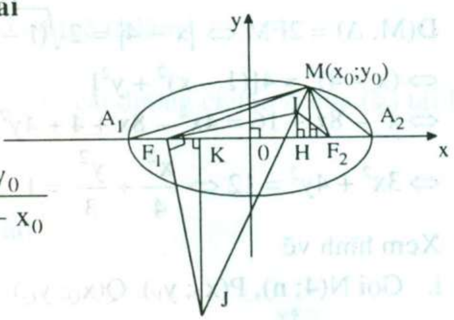
b. Trong tam giác F_1MF_2 ta có:

$$\tan\left(\frac{F_1}{2}\right).\tan\left(\frac{F_2}{2}\right) = \frac{a-c}{a+c} = \frac{b^2}{(a+c)^2}\left(c = \sqrt{a^2 - b^2}\right).$$

c. $\frac{\overline{HI}^2}{\overline{HF_1}.\overline{HF_2}} = -\frac{(a-c)}{a+c} = -\frac{b^2}{(a+c)^2}$.

d. $\dfrac{KJ^2}{\overline{KF_1}.\overline{KF_2}} = -\dfrac{a+c}{a-c} = -\dfrac{b^2}{(a-c)^2}$.

Giải



a. $M(x_0; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$

$F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$

$$\tan A_1 = \frac{ML}{A_1L} = \frac{y_0}{a + x_0};\ \tan A_2 = \frac{y_0}{a - x_0}$$

$$\tan A_1.\tan A_2 = \frac{y_0}{a + x_0}.\frac{y_0}{a - x_0}$$

$$= \frac{y_0^2}{a^2 - x_0^2} = \frac{y_0^2}{\frac{a^2y_0^2}{b^2}} = \frac{b^2}{a^2}$$

b. Lưu ý: trong bài tập số 25 của cuốn sách này, tác giả đã chứng minh hai công thức vectơ có liên quan đến tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp góc A trong tam giác ABC.

- Nếu BA = a, AC = b, AB = c

  I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (1)

  J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC thì

  $$-a.\overrightarrow{JA} + b.\overrightarrow{JB} + c.\overrightarrow{JC} = \vec{0} \quad (2)$$

  Áp dụng (1) vào tam giác F_1MF_2:

  $$MF_1 = a + \frac{c}{a}x_0;\ MF_2 = a - \frac{c}{a}x_0;\ F_1F_2 = 2c$$

  $I(x; y)$: $\overrightarrow{IM} = (x_0 - x; y_0 - y)$

  $\overrightarrow{IF_1} = (-c - x; -y)$

  $\overrightarrow{IF_2} = (c - x; -y)$

  $$2c.\overrightarrow{IM} = (2cx_0 - 2cx; 2cy_0 - 2cy)$$

  $$\left(a - \frac{c}{a}x_0\right).\overrightarrow{IF_1} = \left(-c\left(a - \frac{c}{a}x_0\right) - x\left(a - \frac{c}{a}x_0\right); -y\left(a - \frac{c}{a}x_0\right)\right)$$

  $$\left(a + \frac{c}{a}x_0\right).\overrightarrow{IF_2} = \left(c\left(a + \frac{c}{a}x_0\right) - x\left(a + \frac{c}{a}x_0\right); -y\left(a + \frac{c}{a}x_0\right)\right)$$

  $$2c\overrightarrow{IM} + \left(a - \frac{c}{a}x_0\right)\overrightarrow{IF_1} + \left(a + \frac{c}{a}x_0\right).\overrightarrow{IF_2} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c.x_0 + 2\dfrac{c^2}{a}x_0 - 2x(a+c) = 0 \\ 2c.y_0 - 2y(a = c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c}{a}x_0 \\ y = \dfrac{c}{a+c}y_0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{c}{a}x_0; \dfrac{c}{a+c}y_0\right)$$

$J(x;y)$: $\overrightarrow{JM} = (x_0 - x; y_0 - y)$

$\overrightarrow{JF_1} = (-c - x; -y)$

$\overrightarrow{JF_2} = (c - x; -y)$

$$-2c.\overrightarrow{JM} = (-2c.x_0 + 2c.x; -2cy_0 + 2c.y)$$

$$\left(a - \frac{c}{a}x_0\right).\overrightarrow{JF_1} = \left(-c\left(a - \frac{c}{a}x_0\right) - x\left(a - \frac{c}{a}x_0\right); -y\left(a - \frac{c}{a}x_0\right)\right)$$

$$\left(a + \frac{c}{a}x_0\right).\overrightarrow{JF_2} = \left(c\left(a + \frac{c}{a}x_0\right) - x\left(a + \frac{c}{a}x_0\right); -y\left(a + \frac{c}{a}x_0\right)\right)$$

$$-2c.\overrightarrow{JM} + \left(a - \frac{c}{a}x_0\right).\overrightarrow{JF_1} + \left(a + \frac{c}{a}x_0\right).\overrightarrow{JF_2} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2cx_0 + \dfrac{2c^2}{a}x_0 - 2(a-c)x = 0 \\ -cy_0 - 2(a-c)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-cx_0}{a} \\ y = \dfrac{-cy_0}{a-c} \end{cases} \Rightarrow J\left(-\dfrac{c}{a}x_0; \dfrac{-c}{a-c}y_0\right)$$

$$\tan\frac{F_1}{2} = \frac{IH}{F_1H} = \frac{\dfrac{cy_0}{(a+c)}}{c^2 - \dfrac{c^2}{a^2}x_0^2}; \quad \tan\frac{F_2}{2} = \frac{IH}{F_2H} = \frac{\dfrac{cy_0}{a+c}}{c - \dfrac{c}{a}x_0}$$

$$\tan\frac{F_1}{2}.\tan\frac{F_2}{2} = \frac{\dfrac{c^2y_0^2}{(a+c)^2}}{c^2 - \dfrac{c^2}{a^2}x_0^2} = \frac{\dfrac{b^2\left(1 - \dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}{(a+c)^2}}{\left(1 - \dfrac{x_0^2}{a^2}\right)} = \frac{b^2}{(a+c)^2} = \frac{a^2 - c^2}{(a+c)^2} = \frac{a-c}{a+c}$$

c. $$\frac{HI^2}{HF_1.HF_2} = \frac{\dfrac{c^2y_0^2}{(a+c)^2}}{\left(-c - \dfrac{c}{a}x_0\right)\left(c - \dfrac{c}{a}x_0\right)} = \frac{c^2.b^2\left(1 - \dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}{(a+c)^2} = \frac{-b^2}{(a+c)^2} = -\frac{(a-c)}{a+c}$$

d. $$\frac{KJ^2}{\overline{KF_1}.\overline{KF_2}} = \frac{\dfrac{c^2}{(a-c)^2}.y_0^2}{\left(-c+\dfrac{c}{a}x_0\right)\left(c+\dfrac{c}{a}x_0\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{c^2}{(a-c)^2}.b^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}{-c^2.\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)} = -\frac{b^2}{(a-c)^2} = -\frac{a+c}{a-c}.$$

Bài 222. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > b . 0) có hai điểm tiêu điểm F_1, F_2.

Điểm M di động trên (E). Tìm quĩ tích:

a. Tâm I vòng tròn nội tiếp của tam giác F_1MF_2.

b. Tâm J vòng tròn bàng tiếp ứng với góc M của tam giác F_1MF_2

Giải

a. Theo kết quả của bài tập 221 thì:

$$I\begin{cases} x = \dfrac{c}{a}x_0 \\ y = \dfrac{cy_0}{a+c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{c} = \dfrac{x_0}{a} \\ \dfrac{y}{\dfrac{bc}{a+c}} = \dfrac{y_0}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{c^2} = \dfrac{x_0^2}{a^2} \\ \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{bc}{a+c}\right)^2} = \dfrac{y_0^2}{b^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2} = 1$ là phương trình quĩ tích điểm I.

b. $$J\begin{cases} x = \dfrac{-cx_0}{a} \\ y = \dfrac{-cy_0}{a-c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{c} = \dfrac{-x_0}{a} \\ \dfrac{y}{\dfrac{bc}{a-c}} = \dfrac{-y_0}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{c^2} = \dfrac{x_0^2}{a^2} \\ \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{bc}{a-c}\right)^2} = \dfrac{y_0^2}{b^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{\left(\frac{bc}{a-c}\right)^2} = 1$ là phương trình quĩ tích điểm J.

Bài 223. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và hai đường thẳng di động d: $mx - ny = 0$, d': $nx + my = 0$ $(m^2 + n^2 > 0)$.

a. Tìm tọa độ các giao điểm M, P của d với (E) và các giao điểm N, Q của d' với (E) theo m, n.

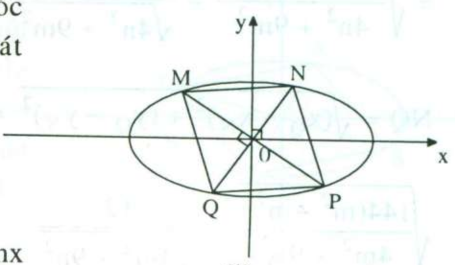
b. Tính theo m, n diện tích tứ giác MNPQ.

c. Tìm điều kiện đối với m, n để diện tích lớn nhất.

d. Tìm điều kiệ đối với m, n để diện tích ấy nhỏ nhất.

Giải

a. d, d' cùng đi qua gốc O và vuông góc nhau. Không làm mất tính chất tổng quát của bài toán, có thể chọn m, n sao cho:



$m^2 + n^2 = 1$

d: $y=\frac{mx}{n}$; d' : $y=\frac{-n}{m}x$

Tọa độ M, P là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y=\dfrac{mx}{n} & (1)\\ 4x^2+9y^2=36 & (2)\end{cases}$

Thế $y=\frac{mx}{n}$ từ (1) vào (2): $4x^2+\frac{9m^2x^2}{n^2}=36$

$$\Leftrightarrow (4n^2+9m^2)x^2=36n^2 \Leftrightarrow x^2=\frac{36n^2}{4n^2+9m^2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{6n}{\sqrt{4n^2+9m^2}}$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{6m}{\sqrt{4n^2+9m^2}}\Rightarrow M\left(\frac{-6n}{\sqrt{4n^2+9m^2}};\frac{6m}{\sqrt{4n^2+9m^2}}\right),$$

$$P\left(\frac{6n}{\sqrt{4n^2+9m^2}};\frac{-6m}{\sqrt{4n^2+9m^2}}\right).$$

Tọa độ N, Q là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y=\dfrac{-n}{m}x & (3)\\ 4x^2+9y^2=36 & (4)\end{cases}$

$$4x^2+\frac{9n^2}{m^2}=36\Leftrightarrow (4m^2+9n^2)x^2=36m^2\Leftrightarrow x^2=\frac{36m^2}{4m^2+9n^2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{6m}{\sqrt{4m^2+9n^2}}$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{6n}{\sqrt{4m^2+9n^2}} \Rightarrow N\left(\frac{6m}{\sqrt{4m^2+9n^2}};\frac{6n}{\sqrt{4m^2+9n^2}}\right),$$

$$Q\left(\frac{-6m}{\sqrt{4m^2+9n^2}};\frac{-6n}{\sqrt{4m^2+9n^2}}\right).$$

b. $MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{\left(\frac{12n}{4n^2+9m^2}\right)^2 + \left(\frac{-12m}{\sqrt{4n^2+9m^2}}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{144(m^2+n^2)}{4n^2+9m^2}} = \frac{12}{\sqrt{4n^2+9m^2}}$ (do đã chọn $m^2 + n^2 = 1$)

$NQ = \sqrt{(x_Q - x_N)^2 + (y_Q - y_N)^2} = \sqrt{\left(\frac{-12}{\sqrt{4m^2+9n^2}}\right)^2 + \left(\frac{-12n}{\sqrt{4m^2+9n^2}}\right)^2}$

$\sqrt{\frac{144(m^2+n^2)}{4m^2+9n^2}} = \frac{12}{\sqrt{4m^2+9n^2}}$

MNPQ là hình thoi nên

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MP.NQ = \frac{1}{2}\frac{12^2}{\sqrt{4n^2+9m^2}.\sqrt{4m^2+9n^2}}$$

$$= \frac{72}{\sqrt{4n^2+9m^2}.\sqrt{4m^2+9n^2}}$$

c. $S_{MNPQ} = \frac{72}{\sqrt{4+5m^2}.\sqrt{4+5n^2}} = \frac{72}{\sqrt{16+20(m^2+n^2)+25m^2n^2}}$

$$= \frac{72}{\sqrt{36+25m^2n^2}} \le 12\,.$$

d. Ngoài ra: $mn \le \frac{m^2+n^2}{2} \Rightarrow m^2n^2 \le \left(\frac{m^2+n^2}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{72}{\sqrt{36+25m^2n^2}} \ge \frac{72}{\sqrt{36+\frac{25}{4}}} = \frac{36}{13}$$

S_{MNPQ} max = 12 khi m = 0 hoặc n = 0.

S_{MNPQ} min $= \frac{36}{13}$ khi $|m| = |n| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 224. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

a. Chứng minh:

α. Một hình bình hành nội tiếp elip (E) thì nhận tâm của (E) làm giao điểm hai đường chéo.

β. Một hình chữ nhật nội tiếp elip (E) nhận các trục của (E) làm trục đối xứng.

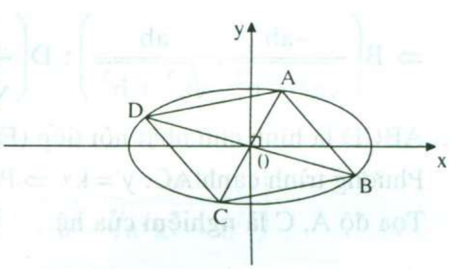
b. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông nội tiếp elip (E)

c. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật nội tiếp elip (E)

d. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của diện tích hình thoi nội tiếp (E).

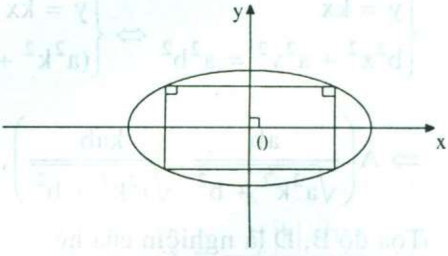
Giải

a. α. Giả sử hình bình hành ABCD nội tiếp (E): theo tính chất tâm đối xứng của (E) và của hình bình hành: hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường; C đối xứng A qua O, D đối xứng B qua O ⇒ đpcm.

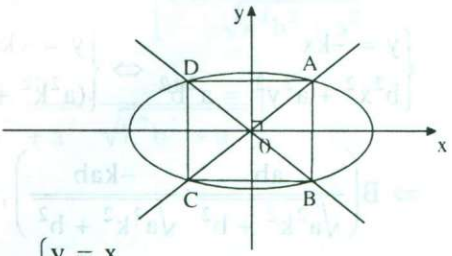


β. Giống như hình bình hành nội tiếp, nhưng các cạnh của hình chữ nhật ABCD có AB ⊥ AD và BC ⊥ CD ⇒ các cạnh của hình chữ nhật song song với hai trục Ox, Oy ⇒ B đối xứng A, C Đối xứng D qua Ox ⇒ AD đối xứng với BC qua trục Ox, tương tự AB và CD đối xứng nhau qua Oy

⇒ điều phải chứng minh.



b. Hình vuông nội tiếp (E) sẽ có các trục của (E) là trục đối xứng ⇒ các đỉnh A, C thuộc đường thẳng y = x; các đỉnh B, D thuộc đường thẳng y = −x.



⇒ Tọa độ các đỉnh A, C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = x \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x \\ (a^2 + b^2)x^2 = a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow y = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ x = \dfrac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow y = \dfrac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ C\left(\frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Tọa độ các đỉnh B, D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y=-x \\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ (a^2+b^2)x^2=a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow y=\dfrac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ x=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow y=\dfrac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right);\ D\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

c. ABCD là hình chữ nhật nội tiếp (E)

Phương trình cạnh AC: $y = kx \Rightarrow$ Phương trình cạnh BD: $y = -kx$.

Tọa độ A, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=kx \\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=kx \\ (a^2k^2+b^2)x^2=a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=kx \\ x=\pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}};\frac{kab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}\right),\ C\left(\frac{-ab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}};\frac{-kab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}\right).$$

Tọa độ B, D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=-kx \\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-kx \\ (a^2k^2+b^2)x^2=a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-kx \\ x=\pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}};\frac{-kab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}\right),\ D\left(\frac{-ab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}};\frac{kab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}\right)$$

$$\Rightarrow AD=\frac{2ab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}};\ AB=\frac{2ab|k|}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}$$

$$S_{ABCD}=AB.AD=\frac{4a^2b^2|k|}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}\le\frac{4a^2b^2|k|}{2ab|k|}=2ab$$

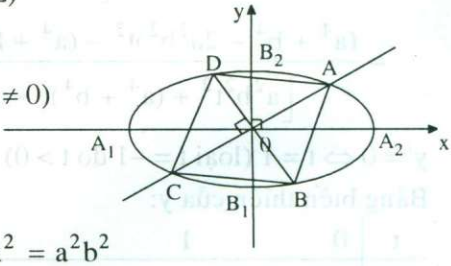
d. Thấy ngay hình thoi nội tiếp (E) có diện tích lớn nhất là hình thoi mà bốn đỉnh của nó là bốn đỉnh của (E).

Diện tích lớn nhất này $S_{max} = \frac{1}{2}A_1A_2.B_1B_2 = \frac{1}{2}2a..2b = 2ab$.

Với một hình thoi ABCD nội tiếp elip (E)

Phương trình cạnh AC: $y = kx$

$\Rightarrow$ Phương trình cạnh BD: $y = -\frac{1}{k}x \quad (k \neq 0)$



Tọa độ A, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = kx \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx \\ (a^2k^2 + b^2)x^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = kx \\ x = \dfrac{\pm ab}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}};\frac{kab}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}\right), C\left(\frac{-ab}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}};\frac{-kab}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}\right)$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{\frac{4a^2b^2(a + k^2)}{a^2k^2 + b^2}} = \frac{2ab\sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}$$

Tọa độ B, D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{k}x \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{k}x \\ (k^2b^2 + a^2)x^2 = k^2a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{k}x \\ x = \dfrac{\pm|k|.ab}{\sqrt{k^2b^2 + a^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{|k|.ab}{\sqrt{k^2b^2 + a^2}};\frac{-ab}{\sqrt{k^2b^2 + a^2}}\right), D\left(\frac{-|k|ab}{\sqrt{k^2b^2 + a^2}};\frac{ab}{\sqrt{k^2b^2 + a^2}}\right)$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{\frac{4a^2b^2(1 + k^2)}{k^2b^2 + a^2}} = \frac{2ab\sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{k^2b^2 + a^2}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}CA.BD = 2a^2b^2\sqrt{\frac{k^4 + 2k^2 + 1}{(a^2k^2 + b^2)(b^2k^2 + a^2)}}.$$

$$= 2a^2b^2.\sqrt{\frac{k^4 + 2k^2 + 1}{a^2b^2k^4 + \left(a^4 + b^4\right)k^2 + a^2b^2}}$$

Đặt $k^2 = t$ $(t > 0)$ và xét hàm số $y = \dfrac{t^2 + 2t + 1}{a^2b^2t^2 + (a^4 + b^4)t + a^2b^2}$ trên $(0; +\infty)$

$$y' = \frac{\left[a^2b^2t^2 + (a^4 + b^4).t + a^2b^2\right](2t + 2) - (t^2 + 2t + 1)(2a^2b^2t + (a^4 + b^4))}{\left[a^2b^2t^2 + (a^4 + b^4)t + a^2b^2\right]^2}$$

$$= \frac{(a^4 + b^4 - 2a^2b^2)t^2 - (a^4 + b^4 - 2a^2b^2)}{\left[a^2b^2t^2 + (a^4 + b^4)t + a^2b^2\right]^2}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (loại $t = -1$ do $t > 0$)

Bảng biến thiên của y:

t	0		1		+∞
y'		−	0	+	
y		↘		↗	

Bảng biến thiên cho biết khi $t = 1$

$\Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$ thì S_{ABCD} nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất này bằng $\dfrac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

Bài 225. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ có hai tiêu điểm F_1, F_2. Điểm M chạy trên (E) ($M \notin Ox$). Pháp truyến của (E) tại M cắt Ox tại N. Gọi K là hình chiếu vuông góc của N trên F_2M.

a. Đặt $\widehat{F_1MF_2} = 2\alpha$. Chứng minh $F_1M.F_2M = \dfrac{b^2}{\cos^2\alpha}$.

b. Chứng minh độ dài đoạn MK không đổi khi M chạy trên (E).

Giải

a. Tam giác MF_1F_2 có:

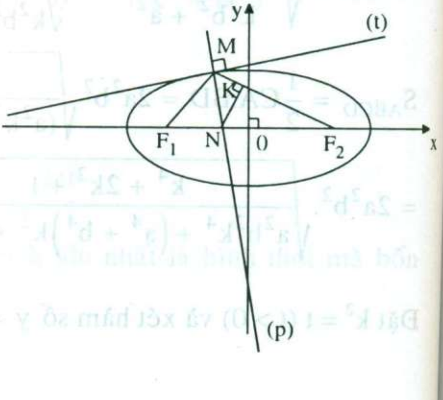
$$F_1F_2^2 = F_1M^2 + F_2M^2 - 2F_1M.F_2M.\cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = (F_1M + F_2M)^2 - 2F_1M.F_2M - 2F_1M.F_2M.\cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = 4a^2 - 2F_1M.F_2M(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow c^2 = a^2 - F_1M.F_2M.\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow F_1M.F_2M = \frac{a^2 - c^2}{\cos^2\alpha} = \frac{b^2}{\cos^2\alpha}.$$



b. Phương trình (t): $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$

Phép tuyến (p) của (E) tại $M(x_0; y_0)$ vuông góc với tiếp tuyến (t) nên phương trình có dạng: $\frac{y_0}{b^2}x - \frac{x_0}{a^2}y + C = 0$

$M(x_0; y_0) \in (p) \Leftrightarrow \frac{x_0y_0}{b^2} - \frac{x_0y_0}{a^2} + C = 0$

$\Leftrightarrow C = \frac{x_0y_0}{a^2b^2}(b^2 - a^2)$

$C = -\frac{c^2}{a^2b^2}x_0y_0$

$\Rightarrow$ Phương trình p: $\frac{y_0}{b^2}x - \frac{x_0}{a^2}y - \frac{c^2}{a^2b^2}x_0y_0 = 0$

(p) cắt Ox tại N $\Leftrightarrow \frac{y_0}{b^2}x_N = \frac{c^2x_0y_0}{a^2b^2} \Leftrightarrow x_N = \frac{c^2x_0}{a^2} \Rightarrow N\left(\frac{c^2x_0}{a^2};0\right)$

Tam giác MNF_2 có:

$MN^2 = \left(\frac{c^2x_0}{a^2} - x_0\right)^2 + y_0^2 = x_0^2\left(\frac{c^2}{a^2} - a\right)^2 + b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2}$

$= x_0^2.\frac{b^4}{a^4} + b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2}$

$F_2N^2 = \left(\frac{c^2x_0}{a^2} - c\right)^2 = \frac{c^4}{a^4}x_0^2 - 2c^3\frac{x_0}{a^2} + c^2$

$F_2M^2 = a^2 - 2cx_0 + \frac{c^2x_0^2}{a^2}$

Gọi góc $\widehat{NMF_2} = \alpha$ thì $\cos\alpha = \frac{MN^2 + F_2M^2 - F_2N^2}{2MN.F_2M}$

Nếu K là hình chiếu vuông góc của N lên F_2M thì tam giác vuông MKN cho

$MK = MN.\cos\alpha = MN.\frac{MN^2 + F_2M^2 - F_2N^2}{2MN.F_2M} = \frac{MN^2 + F_2M^2 - F_2N^2}{2F_2M}$

- Tính riêng $MN^2 + F_2M^2 - F_2N^2$

$= x_0^2.\frac{b^2}{a^4} + b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2} + a^2 - 2cx_0 + \frac{c^2}{a^2}x_0^2 - \frac{c^4}{a^4}x_0^2 + 2c^3\frac{x_0}{a^2} - c^2$

$= \frac{x_0^2}{a^4}(b^4 - c^4) - \frac{x_0^2}{a^2}\left(b^2 - c^2\right) + b^2 + a^2 - c^2 - 2cx_0 + 2c^3\frac{x_0}{a^2}$

$$= \frac{x_0^2}{a^4}\left(b^2+c^2\right)\left(b^2-c^2\right) - \frac{x_0^2}{a^2}\left(b^2-c^2\right) + 2b^2 - 2cx_0 + 2c^3\frac{x_0}{a^2}$$

$$= \frac{x_0^2}{a^2}\left(b^2-c^2\right) - \frac{x_0^2}{a^2}\left(b^2-c^2\right) + 2b^2 - 2cx_0 + 2c^3\frac{x_0}{a^2}$$

$$= 2\left(b^2 - cx_0\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\right) = 2\left[b^2 - cx_0\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)\right] = 2\left[b^2 - cx_0.\frac{b^2}{a^2}\right]$$

$$= 2\frac{b^2}{a}\left[a - \frac{c}{a}x_0\right]$$

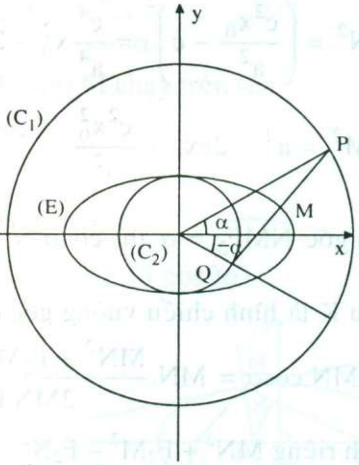
Vậy $MK = \dfrac{MN^2 + F_2M^2 - F_2N^2}{2F_2M} = \dfrac{2\frac{b^2}{a}\left(a - \frac{c}{a}x_0\right)}{2\left(a - \frac{c}{a}x_0\right)} = \dfrac{b^2}{a} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 226. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ và hai đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 = (a+b)^2$, (C_2): $x^2 + y^2 = (a-b)^2$. Các điểm P và Q lần lượt chạy trên (C_1) và (C_2) sao cho Ox là phân giác của góc $\widehat{POQ}$ (O gốc tọa độ). Gọi M là trung điểm PQ

a. Chứng minh M nằm trên elip (E).

b. Chứng minh đường thẳng PQ là pháp tuyến của (E) tại M.

Giải



a. $\widehat{xOP} = \alpha$ thì $\widehat{xOQ} = -\alpha$

$$\Rightarrow P\begin{cases} x = (a+b)\cos\alpha \\ y = (a+b)\sin\alpha \end{cases};$$

$$Q\begin{cases} x = (a-b)\cos(-\alpha) \\ y = (a-b).\sin(-\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q\begin{cases} x = (a-b)\cos\alpha \\ y = -(a-b)\sin\alpha \end{cases}$$

Gọi M(x; y) là trung điểm PQ thì:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_P + x_Q}{2} = a\cos\alpha \\ y = \dfrac{y_P + y_Q}{2} = b\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos\alpha \\ \dfrac{y}{b} = \sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow M \in (E)$$

b. Tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0) \in$ (E0: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$

$\overrightarrow{PQ} = \left(-2b\cos\alpha; -2a\sin\alpha\right)$ cùng phương với $\overrightarrow{m} = (b\cos\alpha; a\sin\alpha)$

Tiếp tuyến tại M có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{n} = \left(-\frac{y_0}{b^2}; \frac{x_0}{a^2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{m}.\overrightarrow{n} = -y_0.\dfrac{\cos\alpha}{b} + x_0.\dfrac{\sin\alpha}{a}\\ M(x_0; y_0) \in (E): \begin{cases} x_0 = a\cos\alpha \\ y_0 = b\sin\alpha \end{cases}\end{array}\right\} \overrightarrow{m}.\overrightarrow{n} = -b\sin\alpha.\frac{\cos\alpha}{b} + a\cos\alpha.\frac{\sin\alpha}{a}$$

$= -\sin\alpha.\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 227. Cho hai điểm A(–3; 0), B(3; 0) và họ đường thẳng d_m:

$(2m^2 + m + 1)x + (m^2 - m + 1)y - (3m^2 + 2) = 0$.

a. Chứng minh quĩ tích những điểm M trong mặt phẳng tọa độ sao cho:

$HM^2 = -\frac{4}{3}\overline{HA}.\overline{HB}$ (H là hình chiếu vuông góc của M trên Ox) là một elip (E).

b. Chứng minh với mọi m, d_m luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt P, Q.

c. Tiếp tuyến của (E) tại P và Q cắt nhau tại I. Chứng minh I chạy trên một đường thẳng cố định khi m thay đổi.

Giải

a. Gọi M(x; y) thì $HM^2 = y^2$; $\overline{HA} = (-3 - x)$; $\overline{HB} = (3 - x)$

$$HM^2 = -\frac{4}{9}\overline{HA}.\overline{HB} \Leftrightarrow y^2 = -\frac{4}{9}(-3 - x)(3 - x) = \frac{4}{9}(9 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow 9y^2 = 36 - 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow M \in \text{elip}(E)$$

b. (d_m) $(2m^2 + m + 1)x + (m^2 - m + 1)y - 3m^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow m^2(2x + y - 3) + m(x - y) + x + y - 2 = 0$ (*)

$$(*) \text{ thỏa } \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow d_m$ luôn cắt (E) tại hai điểm cố định C(1; 1) nằm bên trong elip (E)

$\Leftrightarrow d_m$ luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt P, Q.

c. Gọi P(x_P; y_P) thì: $\begin{cases} x_P = 3\cos\alpha \\ y_P = 2\sin\alpha \end{cases}$ $\left(\alpha = \left(\widehat{Ox, OP}\right)\right)$

$Q(x_Q;y_Q)$ thì $\begin{cases} x_Q = 3\cos\beta \\ y_Q = 2\sin\beta \end{cases}$ $\left(\beta = \left(\widehat{Ox,OQ}\right)\right)$

$\overrightarrow{PQ} = \left(3\cos\beta - 3\cos\alpha; 2\sin\beta - 2\sin\alpha\right)$

$\overrightarrow{PC} = (1 - 3\cos\alpha; 1 - 2\sin\alpha)$

P, Q, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \dfrac{3\cos\beta - 3\cos\alpha}{1 - 3\cos\alpha} = \dfrac{2\sin\beta - 2\sin\alpha}{1 - 2\sin\alpha}$

$\Leftrightarrow 3\cos\beta - 3\cos\alpha - 6\sin\alpha\cos\beta + 6\sin\alpha\cos\alpha$

$= 2\sin\beta - 2\sin\alpha - 6\sin\beta\cos\alpha + 6\sin\alpha\cos\alpha$

$\Leftrightarrow 3\cos\beta - 2\sin\beta - 3\cos\alpha + 2\sin\alpha$

$= 6(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) = 6\sin(\alpha - \beta)$

(T_P) là tiếp tuyến tại P: $\dfrac{x_P x}{9} + \dfrac{y_P y}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x_P x + 9y_P y = 36$ (1)

(T_Q) là tiếp tuyến tại Q: $\dfrac{x_Q x}{9} + \dfrac{y_Q y}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x_Q x + 9y_Q y = 36$ (2)

(T_P) cắt (T_Q) tại I. Tọa độ I là nghiệm của hệ (1) và (2):

$$I. \begin{cases} x = \dfrac{9(y_Q - y_P)}{x_P y_Q - x_Q y_P} \\ y = \dfrac{4(x_P - x_Q)}{x_P y_Q - x_Q y_P} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{9} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_P y_Q - x_Q y_P} \\ \dfrac{y}{4} = \dfrac{x_P - x_Q}{x_P y_Q - x_Q y_P} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{9} = \frac{2\sin\beta - 2\sin\alpha}{6(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)} = \frac{2\sin\beta - 2\sin\alpha}{-6\sin(\alpha - \beta)} = \frac{2\sin\alpha - \sin\beta}{6\sin(\alpha - \beta)}$$

$$\frac{y}{4} = \frac{3\cos\alpha - 3\cos\beta}{6(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)} = \frac{3\cos\alpha - 3\cos\beta}{-6\sin(\alpha - \beta)} = \frac{3\cos\beta - 3\cos\alpha}{6\sin(\alpha - \beta)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{9} + \frac{y}{4} = \frac{3\cos\beta - 2\sin\beta - 3\cos\alpha + 2\sin\alpha}{6\sin(\alpha - \beta)} = \frac{6\sin(\alpha - \beta)}{6\sin(\alpha - \beta)} = 1$$

$\Rightarrow$ Điểm I chạy trên đường thẳng cố định: $\dfrac{x}{9} + \dfrac{y}{4} = 1$.

◆ Lời bình: Hãy xem kĩ bài giải câu c. Tác giả đã đưa lượng giác vào và để đi đến kết luận, lại dùng kĩ thuật sử dụng công thức lượng giác để khử cùng lúc hai tham số α, β.

Bài 228. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. P là một điểm di động ở bên ngoài elip. Từ P kẻ hai tiếp tuyến PM, PN đến (E), tiếp xúc (E) tại M, N.

a. Tìm quĩ tích của P sao cho PM ⊥ PN

b. Khi điểm P chạy trên đường thẳng d: $4x + 3y - 24 = 0$. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

a. Gọi $P(x_0; y_0)$

PM là đường thẳng qua P, có hệ số góc bằng k:

PM có phương trình $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow kx - y + y_0 - kx_0 = 0$

PM là tiếp tuyến của elip (E) $\Leftrightarrow 16k^2 + 9 = (y_0 - kx_0)^2$

$\Leftrightarrow 16k^2 + 9 = y_0^2 - 2kx_0y_0 + k^2x_0^2$ (1)

PN vuông góc với PM nên có hệ số góc bằng $-\frac{1}{k}$ $(k \neq 0)$

PN có phương trình $y = -\frac{1}{k}(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow x + ky - (x_0 + ky_0) = 0$

PN là tiếp tuyến của elip (E) $\Leftrightarrow 16 + 9k^2 = (x_0 + ky_0)^2 = x_0^2 + 2kx_0y_0 + k^2$ (2)

Cộng từng vế (1) và (2)

$25(k^2 + 1) = \left(x_0^2 + y_0^2\right)(k^2 + 1)$

$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 25 \Leftrightarrow$ quĩ tích của P là đường tròn $x^2 + y^2 = 25$

b. Gọi $P\left(p; \frac{24 - 4p}{3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Tiếp tuyến tại } M(x_M; y_M) \in (E): \dfrac{x_Mx}{16} + \dfrac{y_My}{9} = 1 \\ \text{Tiếp tuyến tại } N(x_N; y_N) \in (E): \dfrac{x_Nx}{16} + \dfrac{y_Ny}{9} = 1 \end{array}\right\} \text{hai tiếp tuyến đều qua P}$$

$\Rightarrow$ Tọa độ M, N đều thỏa mãn chung phương trình:

$$\frac{x.p}{16} + \frac{y\left(\frac{24 - 4p}{3}\right)}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{px}{16} + \frac{24y - 4py}{27} = 1$$

$\Leftrightarrow 27px + 384y - 64py - 432 = 0 \Leftrightarrow p(27x - 64y) + 384y - 432 = 0$ (*)

(*) thỏa mãn với mọi p $\Leftrightarrow \begin{cases} 27x - 64y = 0 \\ 384y - 432 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{9}{8} \end{cases}$

$\Rightarrow$ MN luôn đi qua điểm $Q\left(\frac{8}{3}; \frac{9}{8}\right)$.

Bài 229. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b > 0)$. Đường thẳng di động d cùng phương với đường phân giác thứ nhất của mặt phẳng tọa độ cắt (E) tại P, Q. Gọi M là trung điểm PQ.

Chứng minh: Điểm M chạy trên một đường thẳng cố định.

Giải

Phương trình đường thẳng d có dạng: $y = x + m$ (m: theo số thực)

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (E):

$b^2x^2 + a^2(x+m)^2 - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow (a^2+b^2)x^2 + 2a^2\,mx + a^2m^2 - a^2b^2 = 0$

Phương trình này có $\Delta' = a^4m^2 - (a^2+b^2)(a^2m^2 - a^2b^2) = a^2b^2(a^2+b^2-m^2)$

Để d cắt (E) tại hai điểm P, Q thì $a^2+b^2 > m^2 \Leftrightarrow |m| < \sqrt{a^2+b^2}$

Lúc này $x_P + x_Q = \frac{-a^2m}{a^2+b^2}$

M là trung điểm PQ thì M

$$\begin{cases} x = \frac{x_P+x_Q}{2} = \frac{-a^2m}{2(a^2+b^2)} & (1) \\ y = \frac{y_P+y_Q}{2} = \frac{(x_P+m)+(x_Q+m)}{2} = \frac{x_P+x_Q}{2} + m & (2) \end{cases}$$

Khử m: từ (1): $m = \frac{2(a^2+b^2)x}{-a^2}$

Từ (2): $y = \frac{-a^2m}{2(a^2+b^2)} + m = m\left(1 - \frac{a^2}{2(a^2+b^2)}\right)$

$$= \frac{-2(a^2+b^2)x}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{2(a^2+b^2)}\right) = \frac{-2(a^2+b^2)x}{a^2} + x$$

$a^2y = -2a^2x - 2b^2x + a^2x = -(a^2+2b^2)x$

$\Leftrightarrow y = \frac{-(a^2+2b^2)}{a^2}x \Rightarrow$ đpcm.

Bài 230. Cho elip (E): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$ và hai điểm $A(-5;-1)$; $B(-1;1)$.

a. Xét vị trí tương đối của đường thẳng AB và elip (E).

b. Tìm phương trình các tiếp tuyến của (E) cùng phương với đường thẳng AB.

c. Một điểm M di động trên (E). Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MAB.

Giải

a. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1 \Leftrightarrow 5x^2 + 16y^2 - 80 = 0$

Phương trình đường thẳng AB: $\frac{x + 5}{4} = \frac{y + 1}{2} \Leftrightarrow x + 5 = 2y + 2$

$\Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2y - 3$

Phương trình tung độ giao điểm của AB và (E):

$(52y - 3)^2 + 16y^2 - 80 = 0 \Leftrightarrow 36y^2 - 60y - 35 = 0$. Phương trình này có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (E) và đường thẳng AB cắt nhau.

(Cách khác: thế tọa độ A vào phương trình (E): $\frac{(-5)^2}{16} + \frac{(-1)^2}{5} > 1 \Rightarrow$ A ở bên ngoài (E): Thế tọa độ B: $\frac{(-1)^2}{16} + \frac{1^2}{5} < 1 \Rightarrow$ B ở bên trong (E) $\Rightarrow$ AB phải cắt (E).

b. Xét đường thẳng $x - 2y + C = 0$. Đường thẳng này trở thành tiếp tuyến của (E) khi và chỉ khi $1^2.16 + (-2)^2.5 = C^2 \Leftrightarrow C = \pm 6$.

$\Rightarrow$ Có hai tiếp tuyến của (E) song song với đường thẳng AB:

d_1: $x - 2y + 6 = 0$

d_2: $x - 2y - 6 = 0$.

c. Gọi $M(x_0; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{5} = 1$

Diện tích tam giác MAB lớn nhất khi d(M, AB) lớn nhất

$$d(M, AB) = \frac{|x_0 - 2y_0 + 3|}{\sqrt{5}}$$

$$x_0 - 2y_0 = 4.\frac{x_0}{4} - 2\sqrt{5}.\frac{y_0}{\sqrt{5}} \le \sqrt{4^2 + \left(-2\sqrt{5}\right)^2}.\sqrt{\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{5}} \qquad \text{(B.C.S)}$$

$$\Leftrightarrow x - 2y_0 \le \sqrt{36}.\sqrt{1} = \sqrt{36} = 6 \Leftrightarrow x - 2y_0 + 3 \le 9$$

$$\Rightarrow d(M, AB)\max = \frac{9}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{MAB}\max = \frac{1}{2}AB.d\left(M, AB\right) = \frac{1}{2}2\sqrt{5}.\frac{9}{\sqrt{5}} = 9.$$

Bài 231. Cho elip (E): $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ và hai điểm $A\left(1; \frac{24}{5}\right)$, $B\left(-\frac{15}{4}; 1\right)$

a. Xét vị trí tương đối của đường thẳng AB và elip (E)

b. Các điểm M và N lần lượt di động trên (E) và đường thẳng AB. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN.

Giải

a. $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

- Thế tọa độ $A\left(1; \dfrac{24}{5}\right)$ vào phương trình (E): $\dfrac{1^2}{4} + \dfrac{\dfrac{24^2}{25}}{9} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{64}{25} > 1$

  A ở ngoài (E)

- Thế tọa độ B vào phương trình (E): $\dfrac{\dfrac{225}{16}}{4} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{225}{64} + \dfrac{1}{9} > 1$

  B ở ngoài (E)

  $\Rightarrow$ Đường thẳng AB: không cắt (E)

b. Phương trình đường thẳng AB: $\dfrac{x-1}{\dfrac{-15}{4} - 1} = \dfrac{y - \dfrac{24}{5}}{1 - \dfrac{24}{5}} \Leftrightarrow \dfrac{4x-4}{-19} = \dfrac{5y-24}{-19}$

$\Leftrightarrow 4x - 4 = 5y - 24 \Leftrightarrow 4x - 5y + 20 = 0$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (E)$: $\dfrac{x_0^2}{4} + \dfrac{y_0^2}{9} = 1$, $d(M, AB) = \dfrac{|4x_0 - 5y_0 + 20|}{\sqrt{41}}$

Theo bất đẳng thức BCS:

$$4x_0 - 5y_0 = 8.\frac{x_0}{2} - 15.\frac{y_0}{3} \geq -\sqrt{64 + (-15)^2}.\sqrt{\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{9}}$$

$\Leftrightarrow 4x_0 - 5y_0 \geq -17 - 4x_0 - 5y_0 + 20 \geq -17 + 20 = 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{|4x_0 - 5y_0 + 20|}{\sqrt{41}} \geq \dfrac{3}{\sqrt{41}}$

Đây là giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

Bài 232. Trong mặt phẳng (Oxy) cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ M và N là hai điểm thuộc (E) sao cho tích các hệ số góc của OM và ON bằng $-\dfrac{b^2}{a^2}$

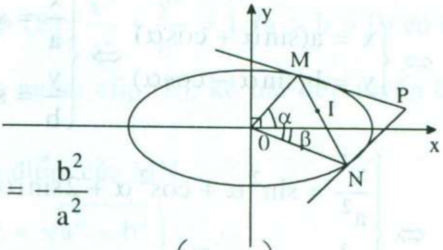
a. Tìm quĩ tích trung điểm I của MN.

b. Tiếp tuyến của (E) tại M và N cắt nhau tại P. Tìm quĩ tích của P.

Giải

a. Nếu $\left(\widehat{Ox, OM}\right) = \alpha$, $\left(\widehat{Ox, ON}\right) = \beta$ thì $M(a\cos\alpha; b\sin\alpha)$, $N(a\cos\beta; b\sin\beta)$

$\overrightarrow{OM} = (a\cos\alpha; b\sin\alpha) \Rightarrow$ OM có hệ số góc $k_1 = \dfrac{b}{a}\tan\alpha$



$\overrightarrow{ON} = (a\cos\beta; b\sin\beta)$

$\Rightarrow$ ON có hệ số góc $k_2 = \frac{b}{a}\tan\beta$

Theo giả thiết:

$$k_1.k_2 = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2}\tan\alpha.\tan\beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha.\tan\beta = -1 \Leftrightarrow \tan\alpha = -\frac{1}{\tan\beta} = -\cot\beta = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \frac{\pi}{2} = \beta \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \left(a\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right); b\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right) = (a\sin\alpha; -b\cos\alpha)$$

I là trung điểm MN thì: $I\begin{cases} x = \frac{a}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) & (1) \\ y = \frac{b}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha) & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow \frac{2x}{a} = \sin\alpha + \cos\alpha \Rightarrow \frac{4x^2}{a^2} = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$

Từ (2) $\Rightarrow \frac{2y}{b} = \sin\alpha - \cos\alpha \Rightarrow \frac{4y^2}{b^2} = \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$

Cộng từng vế: $\frac{4x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{2}} = 1$ là phương trình quĩ tích điểm I.

b. M(acosα; bsinα), N(asinα; –bcosα)

Tiếp tuyến (T_1) của (E) tại M: $\frac{a\cos\alpha.x}{a^2} + \frac{b\sin\alpha.y}{b^2} = 1$

Tiếp tuyến (T_2) của (E) tại N: $\frac{a\sin\alpha.x}{a^2} + \frac{-b\cos\alpha.y}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{\sin\alpha.}{a}x - \frac{\cos\alpha}{b}.y = 1 \Leftrightarrow$ b.sinα.x – acosα.y = ab

$\Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{a}x + \frac{\sin\alpha}{b}y = 1 \Leftrightarrow$ bcosα.x - acosα.y = ab

Tọa độ P là nghiệm của hệ: $\begin{cases} b\sin\alpha.x - a\cos\alpha.y = ab \\ b\cos\alpha.x + a\sin\alpha.y = ab \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a(\sin\alpha + \cos\alpha) \\ y = b(\sin\alpha - \cos\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \sin\alpha + \cos\alpha \\ \dfrac{y}{b} = \sin\alpha - \cos\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2a^2} + \dfrac{y^2}{2b^2} = 1$ là phương trình quĩ tích điểm P.

Bài 233. Cho họ đường cong (C_m): $x^2 + y^2 - \sqrt{3}.mx + m^2 - 1 = 0$

a. Định m để (C_m) là đường tròn.

b. Chứng minh tập hợp (E) các điểm M trong mặt phẳng (Oxy) sac cho ứng với điểm M ta có duy nhất một đường tròn thuộc họ (C_m) qua điểm M đó là một elip (E).

Giải

a. $x^2 + y^2 - \sqrt{3}mx + m^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2.\frac{\sqrt{3}}{2}mx + \frac{3m^2}{4} - \frac{3m^2}{4} + m^2 - 1 + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}m\right)^2 + y^2 = 1 - \frac{m^2}{4}$$

Để (C_m) là đường tròn thì $1 - \dfrac{m^2}{4} > 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 > 0 \Leftrightarrow |m| < 2$.

b. Gọi $M(x_0; y_0)$

(C_m) qua M $\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - \sqrt{3}mx_0 + m^2 - 1 = 0$ (*)

Để thỏa yêu cầu bài toán thì (*) có đúng một nghiệm x_0, ứng với đúng một giá trị của m.

Coi (*) là phương trình bậc hai của x_0; $x_0^2 - \sqrt{3}mx_0 + y_0^2 + m^2 - 1 = 0$

Phương trình này có $\Delta = 3m^2 - 4(y_0^2 + m^2 - 1) = 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow -m^2 - 4y_0^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 - 4y_0^2$

Lúc đó, nghiệm kép $x_0 = \dfrac{\sqrt{3}m}{2} \Leftrightarrow m = \dfrac{2x_0}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{4x_0^2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{4x_0^2}{3} = 4 - 4y_0^2 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{3} + y_0^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Phương trình tập hợp điểm M là: $\dfrac{x^2}{3} + y^2 = 1$ (E).

Bài 234. Trong mặt phẳng (Oxy) cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ có hai tiêu điểm F_1, F_2. Từ điểm $P(x_1;\, y_1)$ ở bên ngoài elip (E), kẻ hai tiếp tuyến đến (E), tiếp xúc (E) tại M, N.

a. Chứng minh đường thẳng OP qua trung điểm của MN.

b. Tính $\frac{1}{F_2M}+\frac{1}{F_2N}$ theo a, b, c, x_2, y_1 $\left(c=\sqrt{a^2-b^2}\right)$.

Giải

a. Tiếp tuyến tại $M(x_M;y_M)$ của (E): $\frac{x_Mx}{a^2}+\frac{y_My}{b^2}-1=0$

Tiếp tuyến tại $N(x_N;\, y_N)$ của (E): $\frac{x_Nx}{a^2}+\frac{y_Ny}{b^2}-1=0$

Cả hai tiếp tuyến đều qua $P(x_1;\, y_1)$: $\begin{cases}\frac{x_Mx_1}{a^2}+\frac{y_My_1}{b^2}-1=0\\ \frac{x_Nx_1}{a^2}+\frac{y_Ny_1}{b^2}-1=0\end{cases}$

⇒ Qua M, N chỉ có một đường thẳng và tọa độ M, N là thỏa mãn chung một phương trình: $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1=0$: đây là phương trình đường thẳng MN.

Đường thẳng OP có phương trình $y_1x-x_1y=0$

Gọi I_1 là giao điểm của OP và MN. Tọa độ I_1 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}y_1x-x_1y=0\\ \frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{x_1}{\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{x_1^2}{a^2}}=\dfrac{a^2b^2x_1}{b^2x_1^2+a^2y_1^2}\\[2ex] y=\dfrac{y_1}{\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{x_1^2}{a^2}}=\dfrac{a^2b^2y_1}{b^2x_1^2+a^2y_1^2}\end{cases}$$

Từ phương trình đường thẳng MN: $y=\left(1-\frac{x_1x}{a^2}\right).\frac{b^2}{y_1}$

⇒ Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng MN và elip (E)

$$b^2x^2+a^2.\frac{b^4}{y_1^2}\left(\frac{a^2-x_1x}{a^2}\right)-a^2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{b^2(a^2-x_1x)^2}{a^2y_1^2}-a^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2y_1^2 + b^2x_1^2\right)x^2 - 2a^2b^2x_1.x + b^2a^4 - a^4y_1^2 = 0$$

$$\Delta' = a^4y_1^2(b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2)$$

$$\Rightarrow x_M + x_N = \frac{2a^2b^2x_1}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2}\ ;\ x_M.x_N = \frac{a^4(b^2 - y_1^2)}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2}$$

$$x_N - x_M = \frac{2a^2y_1\sqrt{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2}}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_M + y_N}{2} = \frac{a^2b^2x_1}{b^2x_1 + a^2y_1^2} = x_{I_1} \Rightarrow I_1 \text{ là trung điểm của MN}$$

$\Rightarrow$ OP qua trung điểm của MN.

b. $F_2M = a - \dfrac{c}{a}x_M\ ;\ F_2N = a - \dfrac{c}{a}x_N$

$$\frac{1}{F_1M} + \frac{1}{F_2N} = \frac{1}{a - \frac{c}{a}x_M} + \frac{1}{a - \frac{c}{a}x_N} = \frac{2a - \frac{c}{a}(x_M + x_N)}{a^2 - c(x_M + x_N) + \frac{c^2}{a^2}(x_M.x_N)}$$

$$= \frac{2a - \frac{c}{a}\frac{2a^2b^2x_1}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2}}{a^2 - c\frac{2a^2b^2x_1}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2} + \frac{c^2}{a^2}.\frac{a^4(b^2 - y_1^2)}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2}} = \frac{2a\left(1 - \frac{cb^2x_1}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2}\right)}{a^2\left[1 - \frac{2cb^2x_1 + c^2(b^2 - y_1^2)}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2}\right]}$$

$$= \frac{2(b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - cb^2x_1)}{a\left[b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - 2cb^2x_1 + c^2(b^2 - y_1^2)\right]} = \frac{2(b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - cb^2x_1)}{ab^2(x_1^2 + y_1^2 - 2cx_1 + c^2)}$$

Bài 235. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$

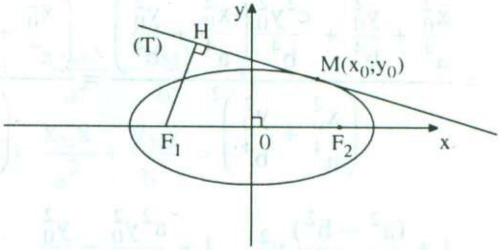
a. Tìm quĩ tích hình chiếu vuông góc của tiêu điểm lên một tiếp tuyến tùy ý của (E)

b. Từ hai tiêu điểm, vẽ hai nửa đường thẳng song song cùng chiều cắt (E) tại M và N. Các tiếp tuyến của (E) tại M và N cắt nhau tại P. Chứng minh P chạy trên một đường tròn cố định.

Giải

a. $M(x_0; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$

Phương trình tiếp tuyến (T) tại $M \in (E)$: $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$



Phương trình đường thẳng qua F_1 và vuông góc với (T) có dạng:

$$\frac{y_0}{b^2}x - \frac{x_0}{a^2}.y + C = 0$$

Đường thẳng này qua $F_1(-c; 0)$

$$\Leftrightarrow \frac{-cy_0}{b^2} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{cy_0}{b^2}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng qua F_1 và vuông góc với (T):

$$\frac{y_0}{b^2}x - \frac{x_0}{a^2}y + \frac{cy}{b^2} = 0$$

H là hình chiếu vuông góc của F_1 lên (T). Tọa độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{y_0}{b^2}x - \dfrac{x_0}{a^2}y = -\dfrac{cy_0}{b^2} \\ \dfrac{x_0}{a^2} + \dfrac{y_0}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{x_0}{a^2} - \dfrac{cy_0^2}{y_0^2}}{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} \\ y = \dfrac{\dfrac{y_0}{b^2} + \dfrac{cy_0y_0}{a^2.b^2}}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{\left(\dfrac{x_0}{a^2} - \dfrac{cy_0^2}{b^4}\right)^2}{\left(\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{x_0^2}{a^4} - \dfrac{2cx_0y_0^2}{a^2b^4} + \dfrac{c^2y_0^4}{b^8}}{\left(\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}\right)^2} \\ y^2 = \dfrac{\left(\dfrac{y_0}{b^2} + \dfrac{cx_0y_0^2}{a^2b^2}\right)^2}{\left(\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{y_0^2}{b^4} + \dfrac{2cx_0y_0^2}{a^2b^4} + \dfrac{c^2x_0^2y_0^2}{a^4b^4}}{\left(\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}\right)^2} \end{cases}$$

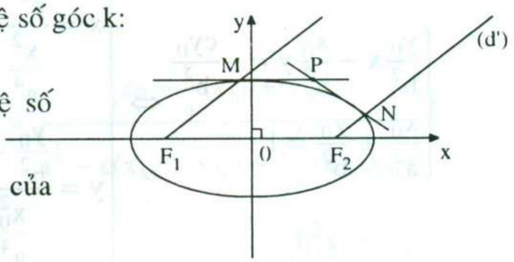
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4} + \dfrac{c^2y_0^4}{b^8} + \dfrac{c^2x_0^2y_0^2}{a^4b^4}}{\left(\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{c^2y_0^2}{b^4}\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)}{\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)^2} = \frac{\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)\left(1+\frac{c^2y_0^2}{b^4}\right)}{\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)^2}$$

$$= \frac{1+\frac{(a^2-b^2)}{b^4}y_0^2}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}} = \frac{1+\frac{a^2y_0^2}{b^4}-\frac{y_0^2}{b^2}}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}} = \frac{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{a^2y_0^2}{b^4}}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}} = \frac{a^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}} = a^2$$

$\Rightarrow$ H có quĩ tích là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$

Do tính chất đối xứng của (E), quĩ tích hình chiếu của F_2 lên (T) cũng là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$



b. Gọi d là đường thẳng qua F_1 và có hệ số góc k:

d có phương trình: $y = k(x + c)$

d' là đường thẳng qua F_2 và có hệ số góc k: d' có phương trình $y = k(x - c)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (E) và d:

$$b^2x^2 + a^2[k(x + c)]^2 - a^2b = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2k^2cx + a^2k^2c^2 - a^2b^2 = 0$$

Phương trình này có $\Delta' = a^4k^4c^2 - (a^2k^2 + b^2)(a^2k^2c^2 - a^2b^2)$

$$= a^2b^2(a^2k^2 + b^2 - c^2k^2) = a^2b^2(a^2k + b^2 - (a^2 - b^2)k^2)$$

$$= a^2b^2b^2(1 + k^2) = a^2b^4(1 + k^2)$$

Chọn $x_M = \dfrac{-a^2k^2c + ab^2\sqrt{1 + k^2}}{a^2k^2 + b^2} \Rightarrow y_M = k(x_M + c)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (E) và d':

$$b^2x^2 + a^2[k(x - c)]^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2k^2 + b^2)x^2 - 2a^2k^2cx + a^2k^2c^2 - a^2b^2 = 0$$

Phương trình này có: $\Delta' = a^4k^4c^2 - (a^2k^2 + b^2)(a^2k^2c^2 - a^2b^2) = a^2b^4(1 + k^2)$

Chọn $x_N = \dfrac{a^2k^2c + ab^2\sqrt{1 + k^2}}{a^2k^2 + b^2} \Rightarrow y_N = k(x_N - c)$

$$\Rightarrow x_N - x_M = \frac{2a^2k^2c}{a^2k^2 + b^2};\ x_M + x_N = \frac{2ab^2\sqrt{1 + k^2}}{a^2k^2 + b^2}$$

$$y_N - y_M = k\left[(x_N - x_M) - 2c\right]$$

Phương trình tiếp tuyến t_M tại M ∈ (E): $\dfrac{x_M x}{a^2} + \dfrac{y_M y}{b^2} = 1$

Phương trình tiếp tuyến t_N tại N ∈ (E): $\dfrac{x_N x}{a^2} + \dfrac{y_N y}{b^2} = 1$

Tọa độ P là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x_M x}{a^2} + \dfrac{y_M y}{b^2} = 1 \\ \dfrac{x_N x}{a^2} + \dfrac{y_N y}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \dfrac{a^2(y_N - y_M)}{x_M.y_N - x_N.y_M} \\ y_P = \dfrac{b^2(x_M - x_N)}{x_M.y_N - x_N y_M} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_M.x_N = x_M.k(x_N - c) \\ x_N.y_M = x_N.k(x_M - c) \end{array}\right\} x_M.y_N - x_N y_M = -ck(x_M + x_N)$$

$$= -ck.\frac{2ab^2\sqrt{1 + k^2}}{a^2k^2 + b^2}$$

$$x_P^2 = \frac{a^4(y_N - y_M)^2}{(x_M.y_N - x_N y_M)^2} \Rightarrow (x_M y_N - x_N y_M)^2 = \frac{4a^2b^4c^2k^2(1 + k^2)}{(a^2k^2 + b^2)^2}$$

- Tính riêng $a^4(y_N - y_M)^2 = a^4.k^2\left[(x_N - x_M)^2 + 4c^2 - 4c(x_N - x_M)\right]$

$$= a^4k^2\left[\frac{4a^4k^4c^2}{(a^2k^2 + b^2)^2} + 4c^2 - \frac{8a^2c^2k^2}{a^2k^2 + b^2}\right]$$

$$= 4a^4k^2c^2\left[\frac{a^4k^4}{\left(a^2k^2 + b^2\right)^2} + 1 - \frac{2a^2k^2}{a^2k^2 + b^2}\right]$$

$$= 4a^4k^2c^2\left[\frac{a^4k^4 + a^4k^4 + 2a^2b^2k^2 + b^4 - 2a^2k^2(a^2k^2 + b^2)}{(a^2k^2 + b^2)}\right]$$

$$= \frac{4a^4b^4c^2.k^2}{(a^2k^2 + b^2)^2}$$

$$y_P^2 = \frac{b^4(x_M - x_N)^2}{(x_M.y_N - x_N.y_M)^2}$$

- Tính riêng $b^4(x_M - x_N)^2 = b^4.\dfrac{4a^4k^4c^2}{(a^2k^2 + b^2)^2}$

$$\Rightarrow x_P^2 + y_P^2 = \frac{\dfrac{4a^2b^4c^2k^2 + 4a^4b^4c^2k^4}{(a^2k^2+b^2)^2}}{\dfrac{4a^2b^4c^2k^2(1+k^2)}{(a^2k^2+b^2)^2}} = \frac{4a^4b^4c^2k^2(1+k^2)}{4a^2b^4c^2k^2(1+k^2)} = a^2$$

$\Rightarrow$ P chạy trên đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$ khi hai điểm M, N chạy trên (E)

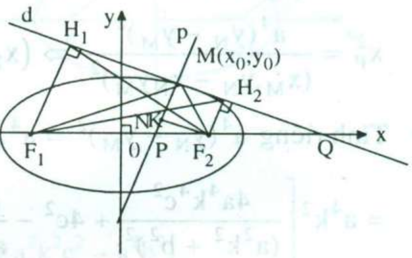
Bài 236. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. d là một tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0) \in (E)$. H_1, H_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của F_1, F_2 lên d.

a. Hai đường thẳng F_1H_2 và F_2H_1 cắt nhau tại N. Chứng minh MN là phân giác của góc $\widehat{F_1MF_2}$

b. Gọi K là hình chiếu của F_2 trên đường thẳng MN. Chứng minh đường thẳng H_2K qua một điểm cố định khi M di động trên (E).

Giải

Trước hết, ta chứng minh một bổ đề: d và p là tiếp tuyến và pháp tuyến tại $M(x_0; y_0) \in (E)$. d cắt trục Ox tại Q, p cắt Ox tại P. p và q sẽ là hai phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{F_1MF_2}$



Chứng minh:

d có phương trình $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - 1 = 0$;

d cắt Ox tại $Q\left(\frac{a^2}{x_0}; 0\right)$

p vuông góc với d nên phương trình có dạng:

$$\frac{y_0}{b^2}x - \frac{x_0}{a^2}y + C = 0$$

p qua $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow C = \frac{-C^2x_0y_0}{a^2b^2}$

$\Rightarrow$ Phương trình p: $\frac{y_0}{b^2}x - \frac{x_0}{a^2}y - \frac{C^2x_0y_0}{a^2b^2} = 0$; p cắt Ox tại $P\left(\frac{C^2x_0}{a^2}; 0\right)$

Xét tam giác MF_1F_2: $\frac{F_1M}{F_2M} = \frac{a + \frac{c}{a}x_0}{a - \frac{c}{a}x_0} = \frac{a^2 + cx_0}{a^2 - cx_0}$

$$\frac{F_1P}{PF_2}=\frac{\frac{c^2x_0}{a^2}+c}{c-\frac{c^2x_0}{a^2}}=\frac{c^2x_0+a^2c}{ca^2-c^2x_0}=\frac{a^2+cx_0}{a^2-cx_0}$$

$$\frac{F_1Q}{F_2Q}=\frac{\frac{a^2}{x_0}+c}{\frac{a^2}{x_0}-c}=\frac{a^2+cx_0}{a^2-cx_0}\Rightarrow\frac{F_1M}{F_2M}=\frac{F_1P}{PF_2}=\frac{F_1Q}{F_2Q}\Rightarrow \text{đpcm}$$

a. $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$

Phương trình đường thẳng F_1H_1 có dạng $\frac{y_0}{b^2}x-\frac{x_0}{a^2}y+C=0$ qua F_1

$\Leftrightarrow C=\frac{cy_0}{b^2}$

$\Rightarrow F_1H_1$ có phương trình: $\frac{y_0}{b^2}x-\frac{x_0}{a^2}y+\frac{cy_0}{b^2}=0$

Phương trình đường thẳng: F_2H_2 có dạng: $\frac{y_0}{b^2}x-\frac{x_0}{a^2}y+C=0$ qua F_2

$\Leftrightarrow C=\frac{-cy_0}{b^2}$

$\Rightarrow F_2H_2$ có phương trình $\frac{y_0}{b^2}x-\frac{x_0}{a^2}y-\frac{cy_0}{b^2}=0$

Tọa độ điểm H_1 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{y_0}{b^2}x-\frac{x_0}{a^2}y=\frac{-cy_0}{b^2}\\ \frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\frac{x_0}{a^2}-\frac{cy_0^2}{b^4}}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}\\ y=\dfrac{\frac{y_0}{b^2}+\frac{cx_0y_0}{a^2b^2}}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}\end{cases}$$

$$H_1\left(\frac{\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{cy_0^2}{b^4}}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}};\frac{\frac{y_0}{b^2}+\frac{cx_0y_0}{a^2b^2}}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}\right),\quad F_2(c;0)$$

Tọa độ điểm H_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{y_0}{b^2}x - \dfrac{x_0}{a^2}y = \dfrac{cy_0}{b^2} \\ \dfrac{x_0}{a^2}x + \dfrac{y_0}{b^2}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{x_0}{a^2} + \dfrac{cy_0^2}{b^4}}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} \\ y = \dfrac{\dfrac{y_0}{b^2} - \dfrac{cx_0y_0}{a^2b^2}}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} \end{cases}$$

$$H_2\left(\dfrac{\dfrac{x_0}{a^2} + \dfrac{cy_0^2}{b^4}}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}; \dfrac{\dfrac{y_0}{b^2} - \dfrac{cx_0y_0}{a^2b^2}}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}\right), F_1(-c;0)$$

- Phương trình đường thẳng H_1F_2: $\dfrac{x - c}{\dfrac{\dfrac{x_0}{a^2} - \dfrac{cy_0^2}{b^4}}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} = \dfrac{y}{\dfrac{\dfrac{y_0}{b^2} + \dfrac{cx_0y_0}{a^2b^2}}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}}$

$$\Leftrightarrow \frac{y_0}{b^2}\left(1 + \frac{cx_0}{a^2}\right)x - \left(\frac{x_0}{a^2} - \frac{2cy_0^2}{b^4} - \frac{cx_0^2}{a^4}\right)y = \frac{cy_0}{b^2}\left(1 + \frac{cx_0}{a^2}\right)$$

- Phương trình đường thẳng H_2F_1: $\dfrac{x + c}{\dfrac{\dfrac{x_0}{a^2} + \dfrac{cy_0^2}{b^4}}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} + c} = \dfrac{y}{\dfrac{\dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{cx_0y_0}{a^2b^2}}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}}$

$$\Leftrightarrow \frac{y_0}{b^2}\left(1 - \frac{cx_0}{a^2}\right)x - \left(\frac{x_0}{a} + \frac{2cy_0^2}{a^4}\right)y = -\frac{cy_0}{b^2}\left(1 - \frac{cy_0}{a^2}\right)$$

- Tọa độ điểm N (giao điểm của H_1F_2 và H_2F_1) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{y_0}{b^2}\left(1 + \dfrac{cx_0}{a^2}\right)x - \left(\dfrac{x_0}{a^2} - \dfrac{2cy_0^2}{b^4} - \dfrac{cx_0^2}{a^4}\right)y = \dfrac{cy_0}{b^2}\left(1 + \dfrac{cx_0}{a^2}\right) \\ \dfrac{y_0}{b^2}\left(1 - \dfrac{cx_0}{a^2}\right)x - \left(\dfrac{x_0}{a^2} + \dfrac{2cy_0^2}{b^4} + \dfrac{cx_0^2}{a^4}\right)y = -\dfrac{cy_0}{b^2}\left(1 - \dfrac{cx_0}{a^2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{x_0\left(1 + \dfrac{2c^2y_0^2}{b^4} + \dfrac{c^2x_0^2}{a^4}\right)}{2a^2\left(\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}\right)};\qquad y = \frac{2y_0}{2b^2}\frac{\left(1 - c^2\dfrac{x_0^2}{a^4}\right)}{\left(\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}\right)}$$

Vậy: $N\left(\dfrac{x_0\left(1 + \dfrac{2c^2y_0^2}{b^4} + \dfrac{c^2x_0^2}{a^4}\right)}{2a^2\left(\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}\right)};\dfrac{y_0\left(1 - \dfrac{cx_0^2}{a^4}\right)}{2b^2\left(\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}\right)}\right)$

Thế tọa độ N vào phương trình p: $\dfrac{y_0}{b^2}x - \dfrac{x_0}{a^2}y - \dfrac{c^2x_0y_0}{a^2b^2} = 0$

$$\frac{y_0}{b^2}.\frac{x_0\left(1 + \dfrac{2c^2y_0^2}{b^4} + \dfrac{c^2x_0^2}{a^4}\right)}{2a^2\left(\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}\right)} - \frac{x_0}{a^2}.\frac{y_0\left(1 - \dfrac{c^2x_0^2}{a^4}\right)}{2b^2\left(\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}\right)} - \frac{c^2x_0y_0}{a^2b^2}$$

$$= \frac{x_0y_0}{2a^2b^2\left(\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}\right)}\left(1 + \frac{2c^2y_0^2}{b^4} + \frac{c^2x_0^2}{a^4} - 1 + \frac{c^2x_0^2}{a^4} - 2c^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)\right)$$

$$= \frac{x_0y_0}{2a^2b^2\left(\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}\right)}\left(1 + \frac{2c^2y_0^2}{b^4} + \frac{c^2x_0^2}{a^4} - 1 + \frac{c^2x_0^2}{a^4} - \frac{2c^2x_0^2}{a^4} - \frac{2c^2y_0^2}{b^4}\right) = 0$$

$\Rightarrow N \in p \Rightarrow$ đpcm

b. Phương trình đường thẳng F_2K có dạng: $\dfrac{x_0}{a^2}x + \dfrac{y_0}{b^2}y + C = 0$

Vì qua $F_2(c; 0) \Leftrightarrow \dfrac{cx_0}{a^2} + C = 0 \Leftrightarrow C = \dfrac{-cx_0}{a^2}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng F_2K: $\dfrac{x_0}{a^2}x + \dfrac{y_0}{b^2}y - \dfrac{cx_0}{a^2} = 0$

Tọa độ điểm K (hình chiếu của F_2 trên MN) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{y_0}{b^2}x - \dfrac{x_0}{a^2}y = \dfrac{c^2x_0y_0}{a^2b^2} \\ \dfrac{x_0}{a^2}x + \dfrac{y_0}{b^2}y = \dfrac{cx_0}{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow K\begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{cx_0}{a^2}\left(\dfrac{x_0}{a^2} + \dfrac{cy_0^2}{b^4}\right)}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} \\ y = \dfrac{\dfrac{cx_0y_0}{a^2b^2}\left(1 - \dfrac{cx_0}{a^2}\right)}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} \end{cases}$$

Từ câu a: $H_2\begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{x_0}{a^2} + \dfrac{cy_0^2}{b^4}}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} \\ y = \dfrac{\dfrac{y_0}{b^2}\left(1 - \dfrac{cx_0}{a^2}\right)}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} \end{cases}$

Nhận xét: $\overrightarrow{OK} = \left(\dfrac{\dfrac{cx_0}{a^2}\left(\dfrac{x_0}{a^2} + \dfrac{cy_0^2}{b^4}\right)}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}; \dfrac{\dfrac{cx_0y_0}{a^bb^2}\left(1 - \dfrac{cx_0}{a^2}\right)}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}\right)$

$\overrightarrow{OH_2} = \left(\dfrac{\dfrac{x_0}{a^2} + \dfrac{cy_0^2}{b^4}}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}; \dfrac{\dfrac{y_0}{b^2}\left(1 - \dfrac{cx_0}{a^2}\right)}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}\right)$

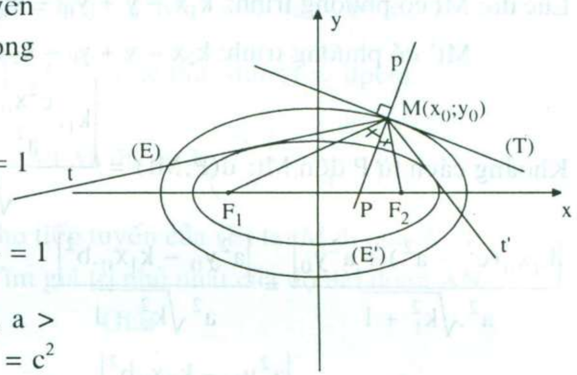
$\Rightarrow \overrightarrow{OK} = \dfrac{cx_0}{a^2}.\overrightarrow{OH_2} \Rightarrow$ O, K, H_2 thẳng hàng $\Rightarrow$ đường thẳng H_2K luôn đi qua gốc tọa độ O(0; 0)

Bài 237. Cho hai elip (E) và (E') có chung hai tiêu điểm F_1, F_2 ((E) chứa (E')). Từ điểm M trên (E), vẽ hai tiếp tuyến Mt, Mt' với elip (E'). Chứng minh hai góc $\widehat{tMt'}$ và $\widehat{F_1MF_2}$ có chung đường phân giác.

Giải

Theo bổ đề (thực ra đây là tính chất quang học của elip) đã chứng minh trong bài 236 của cuốn sách này, đường thẳng vuông góc tiếp tuyến tại

$M(x_0; y_0) \in (E)$ (gọi là pháp tuyến tại M của (E)) là phân giác trong của góc $\widehat{F_1MF_2}$.



Phương trình (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Phương trình (E'): $\dfrac{x^2}{m^2} + \dfrac{y^2}{n^2} = 1$

Với $a > b > 0$, $m > n > 0$, $a > m$, $b > n$ và $a^2 - b^2 = m^2 - n^2 = c^2$ (từ giả thiết (E) chứa (E') và có chung hai tiêu điểm)

Tại $M(x_0; y_0) \in (E)$: $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$, tiếp tuyến có phương trình:

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - 1 = 0$$

Phương trình pháp tuyến (p) tại M có dạng: $\dfrac{y_0}{b^2}x - \dfrac{x_0}{a^2}y + C = 0$. (p) qua $M(x_0;y_0)$

$$\Leftrightarrow \frac{y_0}{b^2}.x_0 - \frac{x_0}{a^2}.y_0 + C = 0$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{x_0y_0}{a^2} - \frac{x_0y_0}{b^2} = \frac{x_0y_0}{a^2b^2}(b^2 - a^2) = \frac{-c^2x_0y_0}{a^2b^2} = 0$$

(p) cắt trục Ox tại: $P\left(\dfrac{c^2x_0}{a^2};0\right)$.

Xem hình vẽ: để giải quyết bài toán này, chỉ cần chứng minh P cách đều hai tiếp tuyến Mt và Mt' của (E')

Gọi Δ là đường thẳng $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow kx - y - y_0 - kx_0 = 0$

(Δ) là tiếp tuyến của (E').

$$\Leftrightarrow k^2.m^2 + (-1)^2.n^2 = (y_0 - kx_0)^2 = y_0^2 - 2x_0y_0k + k^2x_0^2$$

$$\Leftrightarrow (x_0^2 - m^2)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - n^2 = 0$$

Do (E) chứa (E') nên phương trình này chắc chắn có hai nghiệm $k_1 \neq k_2$ và

$$k_1 + k_2 = \frac{2x_0y_0}{x_0^2 - m^2};\ k_1.k_2 = \frac{y_0^2 - n^2}{x_0^2 - m^2}.$$

Lúc đó: Mt có phương trình: $k_1x - y + y_0 - k_1x_0 = 0$

Mt' có phương trình: $k_2x - y + y_0 - k_2x_0 = 0$

Khoảng cách từ P đến Mt: $d(P,Mt) = \dfrac{\left|k_1.\dfrac{c^2x_0}{a^2} + y_0 - k_1x_0\right|}{\sqrt{k_1^2+1}}$

$$\frac{\left|k_1x_0(c^2 - a^2) + a^2y_0\right|}{a^2.\sqrt{k_1^2+1}} = \frac{\left|a^2y_0 - k_1x_0.b^2\right|}{a^2\sqrt{k_1^2+1}}$$

Tương tự: $d(P,Mt') = \dfrac{\left|a^2y_0 - k_2x_0b^2\right|}{a^2\sqrt{k_2^2+1}}$

Giả sử $d(P,Mt) = d(P,Mt')$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|a^2y_0 - b^2k_1x_0\right|}{a^2\sqrt{k_1^2+1}} = \frac{\left|a^2y_0 - b^2k_2x_0\right|}{a^2\sqrt{k_2^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \left|a^2y_0 - b^2k_1x_0\right|.\sqrt{k_2^2+1} = \left|a^2y_0 - b^2k_2x_0\right|.\sqrt{k_1^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2y_0 - b^2k_1x_0\right)^2\left(k_2^2+1\right) = \left(a^2y_0 - b^2k_2x_0\right)^2\left(k_1^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^4y_0^2 - 2a^2b^2x_0y_0k_1 + b^4k_1^2x_0^2\right)\left(k_2^2+1\right)$$

$$= \left(a^4y_0^2 - 2a^2b^2x_0y_0k_2 + b^4k_2^2x_0^2\right)\left(k_1^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow a^4y_0^2k_2^2 - 2a^2b^2x_0y_0k_1k_2^2 + b^4x_0^2k_1^2k_2^2 + a^4y_0^2 - 2a^2b^2x_0y_0k_2 + b^4x_0^2k_1^2$$

$$= a^4y_0^2k_1^2 - 2a^2b^2x_0y_0k_1^2k_2 + b^4x_0^2k_1^2k_2^2 + a^4y_0^2 - 2a^2b^2x_0y_0k_2 + b^4x_0^2k_2^2$$

$$\Leftrightarrow \left(a^4y_0^2 - b^4x_0^2\right)\left(k_2^2 - k_1^2\right) - 2a^2b^2x_0y_0k_1k_2(k_2 - k_1) + 2a^2b^2x_0y_0(k_2 - k_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (k_2 - k_1)\left[\left(a^4y_0^4 - b^4x_0^2\right)(k_2 + k_1) - 2a^2b^2x_0y_0(k_1k_2 - 1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^4y_0^2 - b^4x_0^2\right)\left(\frac{2x_0y_0}{x_0^2 - m^2}\right) - 2a^2b^2x_0y_0\left(\frac{y_0^2 - n^2}{x_0^2 - m^2} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x_0y_0}{x_0^2 - m^2}\left[a^4y_0^2 - b^4x_0^2 + a^2b^2\left(x_0^2 - y_0^2 + n^2 - m^2\right)\right] = 0 \ (m^2 - n^2 = c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4y_0^2 - b^4x_0^2 + a^2b^2x_0^2 - a^2b^2y_0^2 - a^2b^2c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^4y_0^2 - a^2b^2y_0^2\right) + \left(a^2b^2x_0^2 - b^4x_0^2\right) - a^2b^2c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2y_0^2\left(a^2-b^2\right)+b^2x_0^2(a^2-b^2)-a^2b^2c^2=0\ \ (a^2-b^2=c^2)$$

$$\Leftrightarrow c^2\left(a^2y_0^2+b^2x_0^2-a^2b^2\right)=0$$ (đẳng thức đúng) ⇒ đpcm.

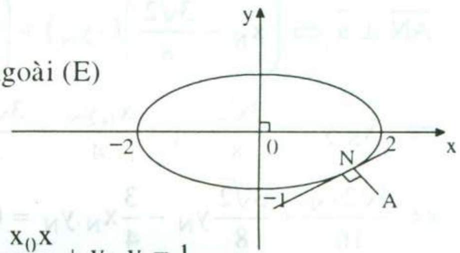
Bài 238. Cho elip (E): $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ và điểm $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{8};\frac{-3\sqrt{2}}{4}\right)$.

a. Tìm điểm M trên (E) sao cho tiếp tuyến của (E) tại M đi qua A.

b. Điểm N di động trên (E). Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn AN.

Giải

a. Do $\frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2}{4}+\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)>1$ nên A ở ngoài (E)



Gọi $M(x_0;y_0)\in(E)$: $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$

Phương trình tiếp tuyến của (E) tại M: $\frac{x_0x}{4}+y_0.y=1$

Tiếp tuyến đi qua A ⇔ $\frac{x_0}{4}.\frac{3\sqrt{2}}{8}+y_0\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)=1$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{2}}{32}-\frac{3\sqrt{2}y_0}{4}=1\Leftrightarrow 3\sqrt{2}x_0-24\sqrt{2}y_0=32$$

$$\Leftrightarrow y_0=\frac{3\sqrt{2}x_0-32}{24\sqrt{2}}=\frac{3x_0-16\sqrt{2}}{24}$$

- $x_0^2+4y_0^2-4=0\Leftrightarrow x_0^2+4\left(\frac{3x_0-16\sqrt{2}}{24}\right)^2-4=0$

$$\Leftrightarrow x_0^2+\left(\frac{3x_0-16\sqrt{2}}{12}\right)^2-4=0\Leftrightarrow 144x_0^2+9x_0^2-96\sqrt{2}x_0+512-576=0$$

$$\Leftrightarrow 153x_0^2-96\sqrt{2}x_0-64=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\frac{16\sqrt{2}-40}{51}\Rightarrow y_0=\frac{-32\sqrt{2}-5}{51}\\ x_0=\frac{16\sqrt{2}+40}{51}\Rightarrow y_0=\frac{-32\sqrt{2}+5}{51}\end{array}\right.$$

Có hai điểm M cùng thỏa mãn yêu cầu bài toán:

$$M\left(\frac{16\sqrt{2}-40}{51};\frac{-3\sqrt{2}-5}{51}\right)\text{ hay }M\left(\frac{16\sqrt{2}+40}{51};\frac{-32\sqrt{2}+5}{51}\right)$$

b. Gọi $N(x_N; y_M) \in (E)$. $x_N^2 + 4y_N^2 - 4 = 0 \quad (*)$

AN sẽ ngắn nhất khi và chỉ khi AN vuông góc với tiếp tuyến tại N của (E).

Phương trình tiếp tuyến tại N: $\frac{x_N}{4}x + y_N y - 1 = 0$ tiếp tuyến này có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \left(-y_N; \frac{x_N}{4}\right)$

$$\overrightarrow{AN} = \left(x_N - \frac{3\sqrt{2}}{8}; y_N + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{AN} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \left(x_N - \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)(-y_N) + \left(y_N + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right).\frac{x_N}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x_N.y_N + \frac{3\sqrt{2}}{8}y_N + \frac{x_N y_N}{4} + \frac{3\sqrt{2}x_N}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{2}x_N}{16} + \frac{3\sqrt{2}}{8}y_N - \frac{3}{4}x_N.y_N = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}x_N}{16} + \frac{\sqrt{2}}{8}y_N - \frac{x_N y_N}{4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x_N + 2\sqrt{2}y_N - 4x_N y_N = 0$$

$$\Leftrightarrow x_N + 2y_N - 2\sqrt{2}x_N.y_N = 0 \Leftrightarrow y_N = \frac{x_N}{2\left(\sqrt{2}x_N - 1\right)} \text{ thế vào } (*)$$

$$x_N^2 + 4\frac{x_N^2}{4\left(\sqrt{2}x_N - 1\right)^2} - 4 = 0 \Leftrightarrow x_N^2\left(\sqrt{2}x_N - 1\right)^2 + x_N^2 - 4\left(\sqrt{2}x_N - 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}x_N - 1\right)^2\left(x_N^2 - 4\right) + x_N^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x_N^2 - 2\sqrt{2}x_N + 1\right)\left(x_N^2 - 4\right) + x_N^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_N^4 - 2\sqrt{2}x_N^3 - 6x_N^2 + 8\sqrt{2}x_N - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x_N - \sqrt{2}\right)^2\left(x_N^2 + \sqrt{2}x_N - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_N = \sqrt{2} \\ x_N = \dfrac{-\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \text{ (loại do vị trí của điểm A)} \\ x_N = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

- Nếu $x_N = \sqrt{2} \Rightarrow y_N = \dfrac{\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}.\sqrt{2}-1\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (loại do vị trí của điểm A)

- Nếu $x_N = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow y_N = \frac{\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}{2\left(\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}-1\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-2\right)} = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

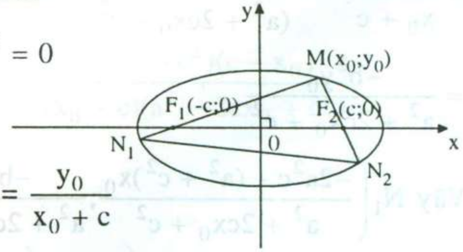
$$\Rightarrow AN_{\min} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-1-\sqrt{3}+3}{2\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(2\sqrt{3}-5)^2 + (2-\sqrt{3})^2}{8}} = \sqrt{\frac{37-20\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}}{8}}$$

$$= \sqrt{\frac{44-24\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{11-6\sqrt{3}}{2}}.$$

Bài 239*. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ có hai tiêu điểm F_1, F_2. Điểm M chạy trên (E). Các đường thẳng F_1M, F_1M cắt (E) tại N_1, N_2. Chứng minh đường thẳng N_1N_2 luôn tiếp xúc với một elip cố định.

Giải



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\overrightarrow{F_1M} = (x_0 + c; y_0)$$

Hệ số góc của đường thẳng $F_1M : k_1 = \dfrac{y_0}{x_0 + c}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng F_1M: $t = k_1(x + c)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{y_0x + y_0c}{x_0 + c}$$

Gọi $N_1(x_1; y_1)$ thì x_1 là nghiệm khác x_0 của phương trình:

$$b^2x^2 + a^2\left(\frac{y_0y + y_0c}{x_0 + c}\right)^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x_0 + c\right)^2.b^2x^2 + a^2\left(y_0^2x^2 + 2cy_0^2x + y_0^2c^2\right) - a^2b^2(x_0 + c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2y_0^2 + b^2x_0^2 + 2b^2cx_0 + b^2c^2\right)x^2 + 2a^2c.y_0^2x + a^2c^2y_0^2 - a^2b^2(x_0 + c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2b^2 + 2b^2cx_0 + b^2c^2\right)x^2 + 2a^2cy_0^2x + a^2c^2y_0^2 - a^2b^2(x_0 + c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2\left(a^2 + 2cx_0 + c^2\right)x^2 + 2a^2cy_0^2x + a^2c^2y_0^2 - a^2b^2(x_0 + c)^2 = 0$$

Phương trình này đã có một nghiệm là x_0

Nếu nghiệm thứ hai là x_1 thì $x_1 + x_0 = \dfrac{-2a^2cy_0^2}{b^2(a^2 + 2cx_0 + c^2)}$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-2acy_0^2}{b^2(a^2 + 2cx_0 + c^2)} - x_0 = \frac{-2a^2cy_0^2 - a^2b^2x_0 - 2b^2cx_0^2 - b^2c^2x_0}{b^2(a^2 + 2cx_0 + c^2)}$$

$$= \frac{-2c(a^2y_0^2 + b^2x_0^2) - b^2x_0(a^2 + c^2)}{b^2(a^2 + 2cx_0 + c^2)} = \frac{-2ca^2b^2 - b^2x_0(a^2 + c^2)}{b^2(a^2 + 2cx_0 + c^2)}$$

$$= \frac{-2a^2c - (a^2 + c^2)x_0}{a^2 + 2cx_0 + c^2}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{y_0x_1 + cy_0}{x_0 + c} = \frac{y_0}{x_0 + c}\left[\frac{-2a^2c - (a^2 + c^2)x_0}{a^2 + 2cx_0 + c^2} + c\right]$$

$$= \frac{y_0}{x_0 + c}\left[\frac{-2a^2c - a^2x_0 - c^2x_0 + a^2c + 2c^2x_0 + c^3}{a^2 + 2cx_0 + c^2}\right]$$

$$= \frac{y_0}{x_0 + c}.\frac{-a^2(x_0 + c) + c^2(x_0 + c)}{(a^2 + 2cx_0 + c^2)} = \frac{y_0}{a^2 + 2cx_0 + c^2}.(-a^2 + c^2)$$

$$= \frac{-b^2y_0}{a^2 + 2cx_0 + c^2}$$

Vậy $N_1\left(\dfrac{-2a^2c - (a^2 + c^2)x_0}{a^2 + 2cx_0 + c^2}; \dfrac{-b^2y_0}{a^2 + 2cx_0 + c^2}\right)$

- $\overrightarrow{F_2M} = (x_0 - c; y_0)$

  Hệ số góc của đường thẳng F_2M là $k_2 = \dfrac{y_0}{x_0 - c}$

  $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng F_2M: $y = k_2(x - c) \Leftrightarrow y = \dfrac{y_0y - cy_0}{x_0 - c}$

  Gọi $N_2(x_2;y_2)$ thì x_2 là nghiệm khác x_0 của phương trình:

$$b^2x^2 + a^2\left(\frac{y_0x - y_0c}{x_0 - c}\right)^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - c)^2.b^2x^2 + a^2(y_0^2x^2 - 2cy_0^2x + y_0^2c^2) - (x_0 - c)^2.a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - 2b^2cx_0 + c^2b^2\right)x^2 - 2a^2cy_0^2x + a^2c^2y_0^2 - a^2b^2(x_0 - c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2\left(a^2 - 2cx_0 + c^2\right)x^2 - 2a^2cy_0^2x + a^2c^2y_0^2 - a^2b^2(x_0 - c)^2 = 0$$

Phương trình này đã có nghiệm là x_0. Nếu nghiệm thứ hai là x_2 thì:

$$x_2 + x_0 = \frac{2a^2xy_0^2}{b^2(a^2 - 2cx_0 + c^2)}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{2a^2cy_0^2}{b^2(a^2 - 2cx_0 + c^2)} - x_0 = \frac{2a^2cy_0^2 - a^2b^2x_0 + 2b^2cx_0^2 - b^2c^2x_0}{b^2(a^2 - 2cx_0 + c^2)}$$

$$= \frac{2c(a^2y_0^2 + b^2x_0^2) - b^2x_0(a^2 + c^2)}{b^2(a^2 - 2cx_0 + c^2)} = \frac{b^2(2a^2c - (a^2 + c^2)x_0)}{b^2(a^2 - 2cx_0 + c^2)}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{2a^2c - (a^2 + c^2)x_0}{a^2 - 2cx_0 + c^2}$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{y_0}{x_0 - c}\left[\frac{2a^2c - (a^2 + c^2)x_0}{a^2 - 2cx_0 + c^2} - c\right]$$

$$= \frac{y_0}{x_0 - c}\left[\frac{2a^2c - a^2x_0 - c^2x_0 - a^2c + 2c^2x_0 - c^3}{a^2 - 2cx_0 + c^2}\right]$$

$$= \frac{y_0}{x_0 - c}.\frac{a^2(c - x_0) - c^2(c - x_0)}{(a^2 - 2cx_0 + c^2)} = \frac{y_0(a^2 - c^2)(c - x_0)}{(x_0 - c)(a^2 - 2cx_0 + c^2)}$$

$$= \frac{-b^2y_0}{a^2 - 2cx_0 + c^2}$$

$$\Rightarrow N_2\left(\frac{2a^2c - (a^2 + c^2)x_0}{a^2 - 2cx_0 + c^2}; \frac{-b^2y_0}{a^2 - 2cx_0 + c^2}\right)$$

$\overrightarrow{N_1N_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng N_1N_2.

- Tính riêng $x_2 - x_1 = \dfrac{2a^2c - (a^2 + c^2)x_0}{a^2 - cx_0 + c^2} + \dfrac{2a^2c + (a^2 + c^2)x_0}{a^2 + cx_0 + c^2}$

$$= \frac{2a^2c(a^2+c^2) - (a^2+c^2)^2x_0 + 4a^2c^2x_0 + 2(a^2+c^2)cx_0^2}{\left[(a^2+c^2) - 2cx_0\right].\left[(a^2+c^2) + 2cx_0\right]}$$

$$+ \frac{2a^2c(a^2+c^2) - 4a^2c^2x_0 + (a^2+c^2)^2x_0 - 2(a^2+c^2)cx_0^2}{\left[(a^2+c^2) - 2cx_0\right].\left[(a^2+c^2) + 2cx_0\right]}$$

$$= \frac{4a^2c(a^2+c^2) - 4(a^2+c^2)c.x_0^2}{(a^2-2cx_0+c^2)(a^2+2cx_0+c^2)} = \frac{4c(a^2+c^2)(a^2-x_0^2)}{(a^2-2cx_0+c^2)(a^2+2cx_0+c^2)}$$

$$= \frac{4c(a^2+b^2)(a^2b^2-b^2x_0^2)}{(a^2-2cx_0+c^2)(a^2+2cx_0+c^2).b^2} = \frac{-4c(a^2+c^2)a^2y_0^2}{b^2(a^2-2cx_0+c^2)(a^2+2cx_0+c^2)}$$

$$y_2 - y_1 = \frac{-b^2y_0}{a^2-2cx_0+c^2} + \frac{b^2y_0}{a^2+2cx_0+c^2}$$

$$= \frac{-b^2y_0(a^2-2cx_0+c^2-a^2-2cx_0-c^2)}{(a^2 02cx_0+c^2)(a^2+2cx_0+c^2)} = \frac{4b^2cx_0y_0}{(a^2-2cx_0)(a^2+2cx_0+c^2)}$$

Phương trình đường thẳng N_1N_2:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Leftrightarrow \frac{x + \dfrac{2a^2c+(a^2+c^2)x_0}{a^2+2cx_0+c^2}}{\dfrac{-4c.(a^2+c^2).a^2y_0^2}{b^2(a^2-2cx_0+c^2)(a^2+2cx_0+c^2)}}$$

$$= \frac{y + \dfrac{b^2y_0}{a^2+2cx_0+c^2}}{\dfrac{4b^2cx_0y_0}{\left(a^2-2cx_0+c^2\right)\left(a^2+2cx_0+c^2\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2(a^2+2cx_0+c^2)x + b^2 2a^2c + (a^2+c^2)b^2x_0}{-(a^2+c^2).a^2y_0}$$

$$= \frac{y(a^2+2cx_0+c^2) + b^2y_0}{b^2x_0}$$

$$\Leftrightarrow b^4x_0(a^2+2cx_0+c^2)x + 2a^2bcx_0 + (a^2+c^2)b^4x_0^2$$

$$= -(a^2+c^2)(a^2+2cx_0+c^2)a^2y_0y - (a^2+c^2)a^2b^2y_0^2$$

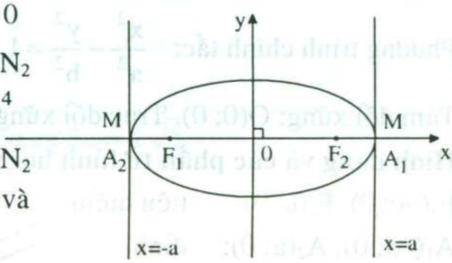
$$\Leftrightarrow b^4x_0x + (a^2+c^2)a^2y_0y + \frac{2a^2b^4cx_0 + (a^2+c^2)b^4x_0^2 + (a^2+c^2)a^2b^2y_0^2}{(a^2+2cx_0+c^2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow b^4x_0x + (a^2+c^2)a^2y_0y + \frac{2a^2b^4cx_0 + (a^2+c^2)b^2(b^2x_0^2 + a^2y_0^2)}{(a^2+2cx_0+c^2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow b^4x_0x + (a^2+c^2)a^2y_0y + \frac{2a^2b^4cx_0 + (a^2+c^2)b^2.a^2b^2}{(a^2+2cx_0+c^2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow b^4x_0.x + (a^2+c^2)a^2y_0y + \frac{a^2b^4(a^2+2cx_0+c^2)}{(a^2+2cx_0+c^2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow b^4x_0.x + (a^2+c^2)a^2y_0y + a^2b^4 = 0$$



Dạng tổng quát của đường thẳng N_1N_2 có $A = b^4x_0$, $B = (a^2+c^2)a^2y_0$, $C = a^2b^4$

Hai vị trí đặc biệt của đường thẳng N_1N_2 là đường thẳng $x = -a$ (khi $M \equiv A_1$) và đường thẳng $x = a$ (khi $M \equiv A_2$)

$\Rightarrow N_1N_2$ sẽ tiếp xúc với elip (E') có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{m^2} = 1$

(E') tiếp xúc $N_1N_2 \Leftrightarrow A^2a^2 + B^2m^2 = C^2$

$$\Leftrightarrow b^8x_0^2.a^2 + (a^2+c^2)a^4y_0^2.m^2 = a^4.b^8$$

$$\Leftrightarrow m^2 = \frac{a^4b^8 - b^8a^2x_0^2}{(a^2+c^2)^2.a^4y_0^2} = \frac{b^6a^2(a^2b^2 - b^2x_0^2)}{(a^2+c^2)^2.a^4y_0^2}$$

$$m^2 = \frac{b^6a^2.a^2y_0^2}{(a^2+c^2)^2.a^4y_0^2} = \frac{b^6}{(a^2+c^2)^2}$$

$\Rightarrow N_1N_2$ luôn tiếp xúc với elip (E') cố định: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b^3}{a^2+c^2}\right)^2} = 1$.

♦ Lời bình: Một bài tập có lời giải dài. Tác giả đã cố gắng tìm một lời giải ngắn hơn nhưng chưa tìm ra. Nhờ độc giả tìm giúp!

Chương V. HYPERBOL

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa:

Hyperbol (H) = $\{M(x; y) / |F_1M - F_2M| = 2a\}$

F_1, F_2: hai tiêu điểm. $F_1 . F_2 = 2c$: tiêu cự. $(a < c)$

Phương trình chính tắc: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(b^2 = c^2 - a^2)$

Tâm đối xứng: O(0; 0). Trục đối xứng Ox; Oy.

2. Hình dạng và các phần tử hình học:

$F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$: tiêu điểm

$A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$: đỉnh

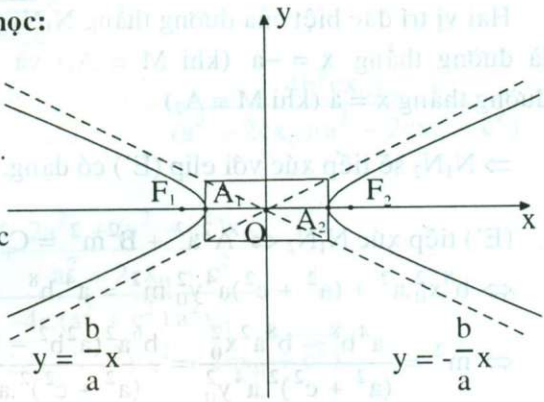
Ox: trục thực; 2a: độ dài trục thực.

Oy: trục ảo; 2b: độ dài trục ảo.

$x = \pm a$; $y = \pm b$: phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở.

$e = \dfrac{c}{a} > 1$: tâm sai của (H)

$y = \pm\dfrac{b}{a}x$: hai tiệm cận của (H).



M(x; y) ∈ (H): $\left.\begin{array}{l} F_1M = \left|a + \dfrac{c}{a}x\right| \\ F_2M = \left|a - \dfrac{c}{a}x\right| \end{array}\right\}$ các bán kính qua tiêu điểm của M.

$x = -\dfrac{a}{e} = -\dfrac{a^2}{c}$: đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1.

$x = \dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{c}$: đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2.

- Điều kiện để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc hyperbol $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$:

$$A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$$

- Tiếp tuyến tại M $(x_0; y_0) \in$ (H): $\dfrac{x_0x}{a^2} - \dfrac{y_0.y}{b^2} = 1$.

B. ĐỀ TOÁN VÀ LỜI GIẢI

Bài 240. Xác định độ dài hai trục, tiêu cự, tâm sai, tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh và phương trình các tiệm cận của các hyperbol:

a. $x^2 - 4y^2 = 16$ b. $4x^2 - 5y^2 - 20 = 0$

Giải

a. $x^2 - 4y^2 = 16 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$. Trục thực $2a = 8$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$. Trục ảo $2b = 4$.

$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$. Tiêu cự $2c = 4\sqrt{5}$

Tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

- Tọa độ tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{3}\,; 0)$, $F_2(2\sqrt{3}\,; 0)$
- Tọa độ các đỉnh: $A_1(-4; 0)$, $A_2(4; 0)$
- Phương trình các tiệm cận: $y = \pm\dfrac{1}{2}x$.

b. $4x^2 - 5y^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

$a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$. Trục thực $2a = 2\sqrt{5}$.

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$. Trục ảo $2b = 4$.

$c^2 = a^2 + b^2 = 5 + 4 = 9 \Rightarrow c = 3$. Tiêu cự $2c = 6$, tâm sai $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

- Tọa độ tiêu điểm: $F_1(-1; 0)$, $F_2(1; 0)$.
- Tọa độ các đỉnh: $A_1(-\sqrt{5}\,; 0)$, $A_2(\sqrt{5}\,; 0)$.

Phương trình các tiệm cận: $y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}x$.

Bài 241. Xác định tiêu điểm, tâm sai, phương trình các đường tiệm cận, phương trình các đường chuẩn của hyperbol:

a. $16x^2 - 9y^2 = 1$.

b. $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{1}{20}$

c. $mx^2 - ny^2 = 1$.

Giải

a. $16x^2 - 9y^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{1}{16}} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = \dfrac{1}{16} \Rightarrow a = \dfrac{1}{4} \\ b^2 = \dfrac{1}{9} \Rightarrow b = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{9} = \frac{25}{144} \Rightarrow c = \frac{5}{12}$$

- Tiêu điểm $F_1\left(-\dfrac{5}{12}; 0\right)$, $F_2\left(\dfrac{5}{12}; 0\right)$

- Tâm sai $e = \dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{3}$.

- Phương trình các tiệm cận: $y = \pm\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}x = \pm\dfrac{4}{3}x$.

- Phương trình các đường chuẩn: $x = -\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{5}{12}} = -\dfrac{3}{20}$; $x = \dfrac{3}{20}$.

b. $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{1}{20} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{5}{20}} - \dfrac{y^2}{\frac{4}{20}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{5}} = 1$

$$c^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20} \Rightarrow c = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

- Tiêu điểm $F_1\left(-\dfrac{3}{2\sqrt{5}}; 0\right)$; $F_2\left(\dfrac{3}{2\sqrt{5}}; 0\right)$

- Tâm sai $e = \dfrac{\frac{3}{2\sqrt{5}}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

- Phương trình các tiệm cận: $y = \pm\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$

- Phương trình các đường chuẩn: $x=-\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2\sqrt{5}}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{6}$; $x=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

c. $mx^2-ny^2=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{1}{m}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$

$$\left.\begin{array}{l} a^2=\dfrac{1}{m} \Rightarrow a=\dfrac{1}{\sqrt{m}} \\ b^2=\dfrac{1}{n} \Rightarrow b=\dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{array}\right\} c^2=a^2+b^2=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{m+n}{mn}$$

- Tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{\dfrac{m+n}{m.n}};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{\dfrac{m+n}{m.n}};0\right)$

- Tâm sai $e=\dfrac{\sqrt{\frac{m+n}{m.n}}}{\frac{1}{\sqrt{m}}}=\sqrt{\dfrac{m+n}{n}}$

- Phương trình các tiệm cận: $y=\pm\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{m}}}x=\pm\sqrt{\dfrac{m}{n}}x$

- Phương trình các đường chuẩn: $x=-\dfrac{\frac{1}{m}}{\sqrt{\frac{m+n}{m.n}}}=-\dfrac{1}{m.\sqrt{\frac{m+n}{m.n}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{\frac{m^2+mn}{n}}}$

$\Rightarrow x=\dfrac{-\sqrt{n}}{\sqrt{m^2+mn}}$.

Bài 242. Xác định tâm đối xứng, độ dài hai trục, tiêu cự, tâm sai, các tiêu điểm, các đỉnh, phương trình các tiệm cận, các đường chuẩn của các hyperbol:

a. $16x^2-9y^2-96x+72y-144=0$.

b. $9x^2-4y^2-36x+32y-8=0$.

Giải

a. $16x^2-9y^2-96x+72y-144=0 \Leftrightarrow 16(x^2-6x+9)-9(y^2-8y+16)=144$

$\Leftrightarrow 16(x-3)^2-9(y-4)^2=144 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)^2}{9}-\dfrac{(y-4)^2}{16}=1$.

Thực hiện phép tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (3; 4)$:

$$\begin{cases} x - 3 = X \\ y - 4 = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + X \\ y = 4 + Y \end{cases}$$

Trong hệ IXY, hyperbol (H) có phương trình: $\dfrac{X^2}{9} - \dfrac{Y^2}{16} = 1$

$a^2 = 9 \quad \Rightarrow a = 3 \Rightarrow$ trục thực $2a = 6$

$b^2 = 16 \quad \Rightarrow b = 4 \Rightarrow$ trục ảo $2b = 8$

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow$ tiêu cự $2c = 10$.

- Tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3}$.
- Tiêu điểm: $F_1(-5; 0) \Rightarrow$ Hệ Oxy: $F_1(-2; 4)$.
  $F_2(5; 0) \Rightarrow$ Hệ Oxy: $F_2(8; 4)$.
- Các đỉnh: $A_1(-3; 0) \Rightarrow$ Hệ Oxy: $A_1(0; 4)$.
  $A_2(3; 0) \Rightarrow$ Hệ Oxy: $A_2(6; 4)$.
- Phương trình các tiệm cận: $Y = \pm\dfrac{4}{3}X \Rightarrow$ Hệ Oxy: $y - 4 = \pm\dfrac{4}{3}(x - 3)$

$$\Rightarrow y = \frac{4}{3}x \;;\; y = -\frac{4}{3}x + 8.$$

- Phương trình các đường chuẩn:

$X = -\dfrac{9}{5} \Rightarrow$ Hệ Oxy: $x - 3 = -\dfrac{9}{5} \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{5}$.

$X = \dfrac{9}{5} \Rightarrow$ Hệ Oxy: $x - 3 = \dfrac{9}{5} \Leftrightarrow x = \dfrac{24}{5}$.

Bài 243.

a. Tính góc $\varphi \left(0 < \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ giữa các tiệm cận của hyperbol có:

1) Tâm sai $e = 2$.

2) Khoảng cách giữa hai tiêu điểm gấp hai lần khoảng cách giữa các đường chuẩn.

b. Tính tâm sai của hyperbol biết:

1) Hai tiệm cận vuông góc.

2) Góc giữa hai tiệm cận bằng $\dfrac{\pi}{3}$.

Giải

a. 1) $e = \dfrac{c}{a} = 2 \Rightarrow \dfrac{c^2}{a^2} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{a^2 + b^2}{a^2} = 4$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{b^2}{a^2}=4 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2}=3 \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\tan\varphi=\sqrt{3} \Leftrightarrow \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

2) Khoảng cách giữa hai tiêu điểm: $2c$.

Khoảng cách giữa hai đường chuẩn: $\frac{2a^2}{c}$

Theo giả thiết thì $2c=\frac{4a^2}{c} \Leftrightarrow c^2=2a^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=2a^2 \Leftrightarrow a^2=b^2 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2}=1$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a}=\tan\varphi=1 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

b. Hai tiệm cận: $y=\frac{b}{a}x$ có hệ số góc $k_1=\frac{b}{a}$

$y=-\frac{b}{a}x$ có hệ số góc $k_2=-\frac{b}{a}$

1) Hai tiệm cận vuông góc $\Leftrightarrow -\frac{b^2}{a^2}=-1 \Leftrightarrow \frac{b}{a}=1 \Leftrightarrow a=b$

$$c^2=a^2+b^2=2a^2 \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}=2 \Leftrightarrow e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}.$$

2) Góc giữa hai tiệm cận bằng $\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$ góc giữa tiệm cận $y=\frac{b}{a}x$ và trục Ox bằng $\frac{\pi}{6} \Rightarrow \tan\varphi=\frac{b}{a}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow b=\frac{a}{\sqrt{3}}$

$$c^2=a^2+b^2=a^2+\frac{a^2}{3}=\frac{4a^2}{3} \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\tan\varphi=\frac{b}{a}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3} \Leftrightarrow b=a\sqrt{3}$$

$$c^2=a^2+b^2=a^2+3a^2=4a^2 \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}=4 \Leftrightarrow e=2.$$

Bài 244. Vẽ các đường cong:

a) $y=3\sqrt{x^2+1}$

b) $x=-\sqrt{y^2+4}$

c) $x=\frac{2}{5}\sqrt{y^2-25}$

d) $y=1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2+4x-5}$

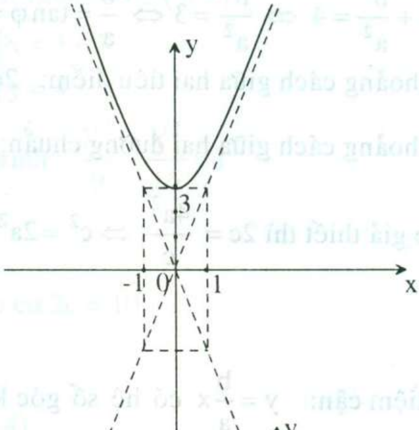
e) $y=\frac{1}{2}\sqrt{|x^2-4|}$

f) $\frac{x|x|}{9}+\frac{y|y|}{16}=1.$

Giải

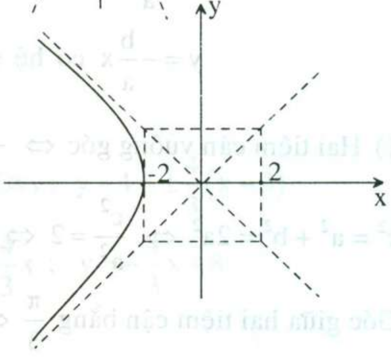
a. $y = 3\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ \dfrac{y^2}{9} = x^2 + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x^2 - \dfrac{y^2}{9} = -1 \end{cases}$



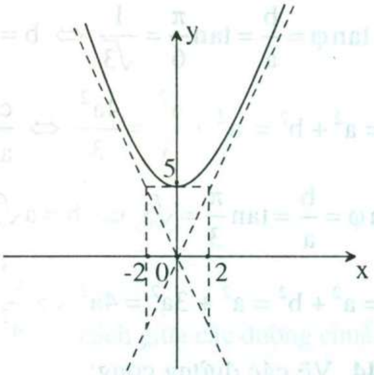
b. $x = -\sqrt{y^2+4} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 = y^2 + 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$



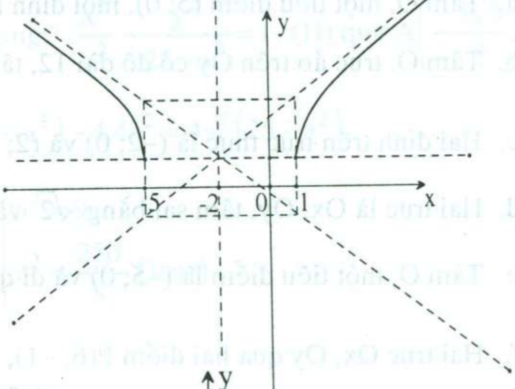
c. $x = \dfrac{2}{5}\sqrt{y^2-25} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| \geq 5 \\ x \geq 0 \\ x^2 = \dfrac{4}{25}\left(y^2 - 25\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |y| \geq 5 \\ x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{25} = -1 \end{cases}$



d. $y = 1 + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2+4x-5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \text{ hay } x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ (y-1)^2 = \dfrac{4}{9}\left[(x+2)^2 - 9\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \text{ hay } x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ (y-1)^2 = \dfrac{4}{9}(x+2)^2 - 4 \end{cases}$

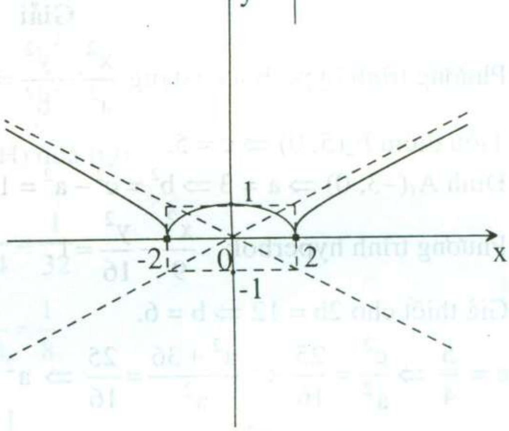
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -5 \text{ hay } x \ge 1 \\ y \ge 1 \\ \dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1 \end{cases}$$



e. $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left|x^2 - 4\right|} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2 = \dfrac{1}{4}\left|x^2 - 4\right| \end{cases}$

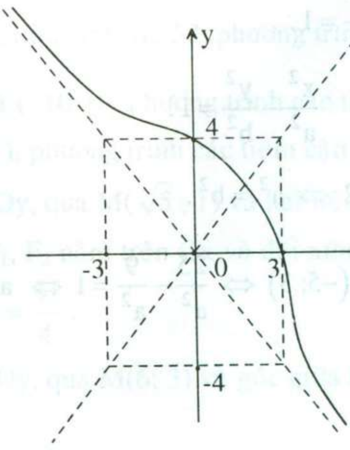
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ 4y^2 = \left|x^2 - 4\right| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \ge 0,\ x \le -2,\ x \ge 2 \\ \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge 0,\ -2 \le x \le 2 \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$



f. $\dfrac{x|x|}{9} + \dfrac{y|y|}{16} = 1 \quad (*)$

- $x > 0, y > 0$: (*) là $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
- $x < 0, y > 0$: (*) là $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = -1$
- $x < 0, y < 0$: (*) là $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = -1 \ (\phi)$
- $x > 0, y < 0$: (*) là $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$



Bài 245. Lập phương trình chính tắc của hyperbol (H) biết:

a. Tâm O, một tiêu điểm (5; 0), một đỉnh là (–3; 0).

b. Tâm O, trục ảo trên Oy có độ dài 12, tâm sai $e = \frac{5}{4}$.

c. Hai đỉnh trên trục thực là (–2; 0) và (2; 0) tâm sai $e = \frac{3}{2}$.

d. Hai trục là Ox, Oy, tâm sai bằng $\sqrt{2}$ và đi qua M(–5; 3).

e. Tâm O, một tiêu điểm là (–5; 0) và đi qua điểm $A\left(-\frac{3\sqrt{5}}{2}; 2\right)$.

f. Hai trục Ox, Oy qua hai điểm P(6; –1), Q(–8; $2\sqrt{2}$).

Giải

a. Phương trình hyperbol có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Tiêu điểm $F_2(5; 0) \Rightarrow c = 5$.
Đỉnh $A_1(-3; 0) \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 16$.

Phương trình hyperbol: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

b. Giả thiết cho $2b = 12 \Rightarrow b = 6$.

$e = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \frac{a^2 + 36}{a^2} = \frac{25}{16} \Rightarrow a^2 = 64$.

Phương trình (H): $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

c. Từ giả thiết: $a = 2$. $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow c = 3$

$a^2 + b^2 = c^2 = 9 \Rightarrow 4 + b^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 5$.

Phương trình (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

d. Phương trình (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$e = \frac{c}{a} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

(H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ qua $M(-5; 3) \Leftrightarrow \frac{25}{a^2} - \frac{9}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 16$

(H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$.

e. Từ giả thiết ⇒ $c = 5$. $c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Leftrightarrow b^2 = 25 - a^2$.

Phương trình hyperbol (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{25-a^2} = 1$. (H) qua $A\left(-\frac{3\sqrt{5}}{2};2\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{45}{4a^2} - \frac{4}{25-a^2} = 1 \Leftrightarrow 45\left(25-a^2\right) - 4.4a^2 = 4a^2\left(25-a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 4a^4 - 161a^2 + 1125 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = 9 \\ a^2 = \frac{250}{8}\ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

(H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

f. Phương trình (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(H) qua (P) ⇔ $\frac{36}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$; (H) qua (Q)

$$\Leftrightarrow \frac{64}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{-7}{-224} = \frac{1}{32}$$

$$\frac{1}{b^2} = \frac{-28}{-224} = \frac{1}{8}.$$

Phương trình (H): $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$.

Bài 246. Lập phương trình chính tắc của hyperbol (H) có:

a. Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x \pm 1 = 0$ và $2y \pm 1 = 0$.

b. Một đỉnh trên trục thực là $(-3; 0)$, phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở là $x^2 + y^2 = 16$.

c. Trục ảo trên Oy, tiêu cự bằng 52, phương trình các tiệm cận là $y = \pm\frac{12}{5}x$.

d. Một tiêu điểm là $(-10; 0)$, phương trình các tiệm cận là $4x \pm 3y = 0$.

e. Qua $A(-6; 2\sqrt{2})$, phương trình các tiệm cận là $x \pm \sqrt{3}y = 0$.

f. Hai trục là Ox, Oy, qua $M(\sqrt{5}; 1)$ và hai tiệm cận vuông góc với nhau.

g. Hai tiêu điểm F_1, F_2 nằm trên Ox và đối xứng qua O; qua điểm M có $x_M = -5$ và $F_1M = \frac{9}{4}$, $F_2M = \frac{41}{4}$.

h. Hai trục là Ox, Oy, qua $M(6; 3)$ và góc giữa hai tiệm cận là 60^0.

Giải

a. Từ phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở $\Rightarrow a = 1, b = \dfrac{1}{2}$.

Phương trình (H): $x^2 - \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 1$.

b. Từ $A_1(-3; 0)$ là đỉnh trên trục thực $\Rightarrow a = 3$.

Từ phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở $x^2 + y^2 = 16$

$\Rightarrow c = 4 \Rightarrow c^2 = 16 = 3^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 7$.

Phương trình (H): $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{7} = 1$.

c. $2c = 52 \Rightarrow c = 26$

Tiệm cận $y = \pm\dfrac{12}{5}x \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{12}{5} \Leftrightarrow b = \dfrac{12a}{5}$.

$$c^2 = 26^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \frac{144a^2}{25} = \frac{169a^2}{25} = 26^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{25.26^2}{169} = 100 \Rightarrow b^2 = 576$$

Phương trình (H): $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{576} = 1$.

d. $F_1(-10; 0) \Rightarrow c = 10$. $4x \pm 3y = 0 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{4}{3}x \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow b = \dfrac{3a}{4}$.

$$c^2 = 100 = a^2 + \frac{9a^2}{16} = \frac{25a^2}{16} \Leftrightarrow a^2 = 64 \Rightarrow b^2 = 36$$

Phương trình (H): $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$.

e. Từ phương trình các tiệm cận: $x \pm \sqrt{3}y = 0 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

$\Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow b = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow b^2 = \dfrac{a^2}{3}$.

Phương trình (H) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{3y^2}{a^2} = 1$

(H) qua $A(-6; 2\sqrt{2})$ $\Leftrightarrow \dfrac{(-6)^2}{a^2} - \dfrac{3\left(2\sqrt{2}\right)^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{36}{a^2} - \dfrac{24}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 12 \Rightarrow b^2 = 4$

Phương trình (H): $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

f. Hai tiệm cận vuông góc với nhau ⇔ a = b.

Phương trình (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

qua M($\sqrt{5}$; 1) ⇔ $\frac{5}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 4$

Phương trình (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

g. Phương trình (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Điểm M có $x_M = -5$ thuộc nhánh bên trái nên:

$$\begin{cases} -\frac{c}{a}(-5) - a = \frac{9}{4} \\ -\frac{c}{a}(-5) + a = \frac{41}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 10.\frac{c}{a} = \frac{50}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ \frac{c}{a} = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9.$

Phương trình (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

h. Đề không nói rõ về góc của hai tiệm cận, nên có hai trường hợp:

- Trường hợp 1: $\tan\varphi = \frac{b}{a} = \tan 60^0 = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = a\sqrt{3}$

  Phương trình (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$

  (H) qua M(6; 3) ⇔ $\frac{36}{a^2} - \frac{9}{3a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 33 \Rightarrow b^2 = 99$

  Phương trình (H): $\frac{x^2}{33} - \frac{y^2}{99} = 1$.

- Trường hợp 2: $\tan\varphi = \frac{b}{a} = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow b = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

  Phương trình (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\frac{a^2}{3}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{3y^2}{a^2} = 1$

  (H) qua M(6; 3) ⇔ $\frac{36}{a^2} - \frac{27}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 3$

  Phương trình (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$.

Bài 247. Lập phương trình chính tắc của hyperbol (H) có:

a. Tâm sai $e = \frac{3}{2}$, phương trình hai đường chuẩn $x = \pm\frac{4}{3}$.

b. Tâm O, trục ảo trên Oy có độ dài 6, khoảng cách giữa hai đường chuẩn là $\frac{32}{5}$.

c. Phương trình hai tiệm cận là $y = \pm\frac{4}{3}x$, phương trình hai đường chuẩn là $x = \pm\frac{9}{5}$.

d. Qua $M(3; \frac{5}{2})$, phương trình hai đường chuẩn là $x = \pm\frac{4}{3}$.

e. Một tiêu điểm F(5; 0) với đường chuẩn tương ứng $x = \frac{16}{5}$.

f. Tâm O; trục thực nằm trên Ox, qua M(–4; 3) và M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

g. Tâm O, trục thực Ox, qua $M(x_1; y_1)$ $(x_1.y_1 \neq 0)$ và M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

Giải

a. $\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$; $\frac{a^2}{c}=\frac{4}{3} \Rightarrow c=\frac{3a}{2}$; $\frac{a^2}{\frac{3a}{2}}=\frac{2}{3}a=\frac{4}{3} \Rightarrow a=2 \Rightarrow c=3$

$\Rightarrow b^2=c^2-a^2=9-4=5$

Phương trình (H): $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

b. $2b = 6 \Leftrightarrow b = 3 \Rightarrow$ Khoảng cách giữa hai đường chuẩn là:

$\frac{2a^2}{c}=\frac{32}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{c}=\frac{16}{5} \Leftrightarrow \frac{c^2-9}{c}=\frac{16}{5} \Leftrightarrow 5c^2-16c-45=0 \Leftrightarrow c=5$ (loại $c<0$)

$\Rightarrow a^2 = 16$. Phương trình (H): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

c. $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$; $\frac{a^2}{c}=\frac{9}{5} \Rightarrow b^2=\frac{16a^2}{9}$; $\frac{a^4}{c^2}=\frac{81}{25} \Leftrightarrow \frac{a^4}{a^2+b^2}=\frac{a^4}{a^2+\frac{16a^2}{9}}=\frac{9a^2}{25}=\frac{81}{25}$

$\Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=3, b=\frac{4a}{3}=4$.

Phương trình (H): $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

d. Phương trình (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Phương trình hai đường chuẩn: $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{a^2}{c}=\frac{4}{3}$.

(H) qua M(3; $\frac{5}{2}$) $\Leftrightarrow\frac{9}{a^2}-\frac{25}{4b^2}=1\Leftrightarrow b^2=\frac{25a^2}{36-4a^2}$

Từ $\frac{a^2}{c}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{a^4}{a^2+b^2}=\frac{16}{9}\Leftrightarrow\frac{a^4}{a^2+\frac{25a^2}{36-4a^2}}=\frac{16}{9}\Leftrightarrow\frac{a^2\left(36-4a^2\right)}{61-4a^2}=\frac{16}{9}$

$\Leftrightarrow 9a^4-97a^2+244=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2=4\\ a^2=\frac{61}{9}\ (\text{loại})\end{array}\right.$; $a^2=4\Rightarrow b^2=5$.

Phương trình (H): $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

e. Từ $F_1(5; 0)\Rightarrow c=5$.

Đường chuẩn tương ứng $x=\frac{16}{5}=\frac{a^2}{c}\Rightarrow a^2=16$

$c^2-a^2=b^2\Rightarrow 25-16=9=b^2$

Phương trình (H): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

f. Tam giác MF_1F_2 vuông tại M $\Leftrightarrow OM=OF_1=OF_2=c\Leftrightarrow c=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

$25=a^2+b^2\Leftrightarrow b^2=25-a^2$.

Phương trình (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{25-a^2}=1$

(H) qua M(–4; 3) $\Leftrightarrow\frac{(-4)^2}{a^2}-\frac{3^2}{25-a^2}=1$

$\Leftrightarrow 16\left(25-a^2\right)-9a^2=a^2\left(25-a^2\right)\Leftrightarrow a^4-50a^2+400=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2=10\\ a^2=40\ (\text{loại})\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow b^2=15$. Phương trình (H): $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{15}=1$.

g. MF_1F_2 là tam giác vuông tại M $\Leftrightarrow OM=OF_1=OF_2=c$

$\Rightarrow c=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}\Leftrightarrow c^2=a^2+b^2\Leftrightarrow b^2=c^2-a^2={x_1}^2+{y_1}^2-a^2$

Phương trình (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{{x_1}^2+{y_1}^2-a^2}=1$.

(H) qua $M(x_1; y_1)$

$$\Leftrightarrow \frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{{x_1}^2+{y_1}^2-a^2}=1 \Leftrightarrow {x_1}^2\left({x_1}^2+{y_1}^2\right)-{x_1}^2a^2-{y_1}^2a^2=a^2\left({x_1}^2+{y_1}^2\right)-a^4$$

$$\Leftrightarrow a^4-2\left({x_1}^2+{y_1}^2\right)a^2+{x_1}^2\left({x_1}^2+{y_1}^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2={x_1}^2+{y_1}^2-|y_1|.\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2} \\ a^2={x_1}^2+{y_1}^2+|y_1|.\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}\ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow b^2={x_1}^2+{y_1}^2-{x_1}^2-{y_1}^2+|y_1|.\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}=|y_1|.\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}.$$

Phương trình (H): $\frac{x^2}{{x_1}^2+{y_1}^2-|y_1|.\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}-\frac{y^2}{|y_1|.\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}=1$.

Bài 248. Lập phương trình của hyperbol (H) có:

a. Tâm $I(1; a)$, một tiêu điểm $F_1(-4; 2)$, một đỉnh $A(4; 2)$.

b. Hai tiêu điểm $F_1(-1; -5)$, $F_2(-1; 3)$, tâm sai $e=\frac{4}{3}$.

c. Hai đỉnh trên trục thực $A_1(-10; 1)$, $A_2(2; 1)$, qua $M(3\sqrt{5}-4; 3)$.

d. Tiệm cận $y=\pm\frac{2}{3}(x-1)$, tiêu cự $2\sqrt{3}$, trục thực cùng phương Oy.

e. Qua gốc tọa độ và có hai tiêu điểm $F_1(-2; 0)$, $F_2(0; 3)$.

f. Một tiêu điểm $F(2; -3)$ với đường chuẩn tương ứng là $3x - y + 3 = 0$ và tâm sai $e=\sqrt{5}$.

Giải

a. Xét phép tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI}=(1; 2)$: $\begin{cases} x=1+X \\ y=2+Y \end{cases}$

Trong hệ trục IXY: $F_1(-5; 0)$, $A(3; 0)$

Hyperbol có $c = 5$, $a = 3 \Rightarrow b^2=c^2-a^2=25-9=16$

Trong hệ IXY, (H) có phương trình: $\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{16}=1$

Đưa về hệ Oxy: $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$.

b. Gọi I là trung điểm F_1F_2: $I(-1; -1)$

Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI}=(-1;-1)$: $\begin{cases} x=-1+X \\ y=-1+Y \end{cases}$

Trong hệ trục IXY: $F_1(0; -4)$, $F_2(0; 4)$ $\Rightarrow c = 4$. $e = \frac{4}{3} = \frac{c}{a} = \frac{4}{a} \Rightarrow a = 3$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7.$$

Trong hệ IXY, (H) có phương trình: $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{7} = -1$

Đưa về hệ Oxy: $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{7} = -1$.

c. $A_1(-10; 1)$, $A_2(2; 1)$.

Gọi I là trung điểm đoạn thẳng A_1A_2: $I(-4; 1)$

Tịnh tiến hệ Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (-4;1)$: $\begin{cases} x = -4 + X \\ y = 1 + Y \end{cases}$

Trong hệ trục IXY, hyperbol (H) có a = 6, $M(3\sqrt{5}; 2)$

Phương trình (H) có dạng: $\frac{X^2}{36} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$.

(H) qua $M(3\sqrt{5}; 2) \Leftrightarrow \frac{45}{36} - \frac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 16$

Phương trình (H): $\frac{X^2}{36} - \frac{Y^2}{16} = 1$. Đưa về hệ Oxy: $\frac{(x+4)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$.

d. Tiệm cận $y = \pm\frac{2}{3}(x-1)$: thực hiện tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (1; 0)$: $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = Y \end{cases}$.

Trong hệ trục IXY, tiệm cận của (H) có phương trình: $X = \pm\frac{3}{2}Y$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = \frac{3a}{2}$. Tiêu cự $2c = \sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3}$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 3 = a^2 + \frac{9a^2}{4} = \frac{13a^2}{4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{12}{13},\ b^2 = \frac{9.\frac{12}{13}}{4} = \frac{27}{13}$$

Phương trình (H): $\frac{X^2}{\frac{12}{13}} - \frac{Y^2}{\frac{27}{13}} = -1$. Đưa về hệ Oxy: $\frac{(x-1)^2}{\frac{12}{13}} - \frac{y^2}{\frac{27}{13}} = -1$.

e. $\left.\begin{array}{l} OF_1 = 2 \\ OF_2 = 3 \end{array}\right\} OF_2 - OF_1 = 1 = 2a$

Gọi $M \in (x; y) \in (H) \Leftrightarrow |F_1M - F_2M| = 1$.

Giả sử $F_1M > F_2M$: $F_1M - F_2M = 1$ (1)

$$F_1M^2 = (x+2)^2 + y^2 \ ; \ F_2M^2 = x^2 + (y-3)^2$$

$\Rightarrow F_1M - F_2M = 4x + 4 + 6y - 9 = 4x + 6y - 5$ (2)

Chia từng vế (2) và (1): $F_1M + F_2M = 4x + 6y - 5,\ F_1M - F_2M = 1$

$\Rightarrow F_1M = 2x + 3y - 2 \Rightarrow (2x + 3y - 2)^2 = (x+2)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 + 4 + 12xy - 8x - 12y = x^2 + 4x + 4 + y^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 8y^2 + 12xy - 12x - 12y = 0$ là phương trình của (H).

f. Gọi $M(x; y) \in (H)$ thì $FM = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}$

$$d(M, \Delta) = \frac{|3x - y + 3|}{\sqrt{10}}$$

Theo tính chất của đường chuẩn thì $\dfrac{FM}{d(M,\Delta)} = e = \sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}}{\dfrac{|3x-y+3|}{\sqrt{10}}} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{10}.\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2} = \sqrt{5}|3x-y+3| \Leftrightarrow \sqrt{2}.\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2} = |3x-y+3|$

$\Leftrightarrow 2\left[x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9\right] = 9x^2 + y^2 + 9 - 6xy + 18x - 6y$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 + 2y^2 + 12y + 18 = 9x^2 + y^2 + 9 - 6xy + 18x - 6y$

$\Leftrightarrow 7x^2 - y^2 - 6xy + 26x - 18y - 17 = 0$ là phương trình của (H).

Bài 249. Tìm những điểm trên hyperbol (H): $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$

a. Có bán kính qua tiêu điểm trái bằng hai lần bán kính qua tiêu điểm phải.

b. Nhìn hai tiêu điểm dưới góc vuông.

c. Nhìn hai tiêu điểm dưới góc 120^0.

Giải

a. (H) viết lại thành $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$, $a = 4, b = 3, c = 5$.

Gọi $M(x; y) \in (H)$ thì $MF_1 = 4 + \dfrac{5}{4}x$; $MF_2 = -4 + \dfrac{5}{4}x$

$MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow 4 + \dfrac{5}{4}x = -8 + \dfrac{5}{2}x \Leftrightarrow \dfrac{5}{4}x = 12 \Leftrightarrow x = \dfrac{48}{5} \Rightarrow y = \pm\dfrac{3}{5}\sqrt{119}$

Có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán: $M_1\left(\dfrac{48}{5}; \dfrac{3}{5}\sqrt{119}\right)$, $M_2\left(\dfrac{48}{5}; -\dfrac{3}{5}\sqrt{119}\right)$

b. $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$. Gọi $M(x;y)\in(H)$: $\overrightarrow{F_1M}=(x+5;\ y)$, $\overrightarrow{F_2M}=(x-5;y)$

$$\overrightarrow{F_1M}\perp\overrightarrow{F_2M}\Rightarrow(x+5)(x-5)+y^2=0\Leftrightarrow x^2+y^2-25=0\Leftrightarrow x^2+\frac{9}{16}\left(x^2-16\right)=25$$

$$\Leftrightarrow\frac{25x^2}{16}=25+9=34\Leftrightarrow x^2=\frac{16.34}{25}\Leftrightarrow x=\pm\frac{4}{5}\sqrt{34}\Rightarrow y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{\frac{16.34}{25}-16}$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{\frac{16.9}{25}}=\pm\frac{9}{5}.$$

Có 4 điểm M thỏa yêu cầu bài toán:

$$M_1\left(\frac{4}{5}\sqrt{34};\frac{9}{5}\right),\ M_2\left(-\frac{4}{5}\sqrt{34};\frac{9}{5}\right),\ M_3\left(\frac{4}{5}\sqrt{34};-\frac{9}{5}\right),\ M_4\left(-\frac{4}{5}\sqrt{34};-\frac{9}{5}\right).$$

c. $M(x;y)\in(H)$. Tam giác F_1MF_2 trong trường hợp này có:

$$F_1M=4+\frac{5}{4}x,\ F_2M=-4+\frac{5}{4}x,\ F_1F_2=10,\ \widehat{F_1MF_2}=120^0$$

$$F_1F_2{}^2=F_1M^2+F_2M^2-2.F_1M.F_2M.\cos120^0$$

$$\Leftrightarrow 100=\left(4+\frac{5}{4}x\right)^2+\left(-4+\frac{5}{4}x\right)^2-2\left(\frac{5}{4}x+4\right)\left(\frac{5}{4}x-4\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 100=2.4^2+2.\frac{25}{16}x^2+\frac{25}{16}x^2-16\Leftrightarrow\frac{75x^2}{16}=84\Leftrightarrow x=\pm\frac{8\sqrt{7}}{5}\Rightarrow y=\pm\frac{3\sqrt{3}}{5}$$

Có 4 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán:

$$M_1\left(\frac{8\sqrt{7}}{5};\frac{3\sqrt{3}}{5}\right),\ M_2\left(\frac{8\sqrt{7}}{5};-\frac{3\sqrt{3}}{5}\right),\ M_3\left(-\frac{8\sqrt{7}}{5};\frac{3\sqrt{3}}{5}\right),\ M_4\left(-\frac{8\sqrt{7}}{5};-\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$$

Bài 250.

a. Lập phương trình chính tắc của hyperbol (H) có 2 tiêu điểm trùng với hai tiêu điểm của elip (E): $9x^2+25y^2-225=0$ và có tâm sai $e=2$. Viết phương trình hyperbol (H') liên hợp với (H) và tính tâm sai (H').

b. Định R để đường tròn tâm là gốc tọa độ O, bán kính R cắt (H') tại những điểm cùng nhìn hai tiêu điểm của (H') dưới góc 60^0.

Giải

a. (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\Rightarrow a=5,\ b=3,\ c=4$.

$$\Rightarrow(H)\text{ có }c=4;\ \frac{c}{a}=\frac{4}{a}=2\Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow b^2=c^2-a^2=12.$$

Phương trình (H): $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1 \Rightarrow (H'): \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=-1$.

(H') có $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 4 \Rightarrow e_{(H')}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

b. Gọi $M(x; y) \in (H')$. Theo giả thiết: đường tròn ngoại tiếp tam giác F_1MF_2 có bán kính $R=\frac{F_1F_2}{2\sin 60^0}=\frac{8}{\sqrt{3}}$.

Bài 251. Tìm độ dài dây cung đi qua tiêu điểm và vuông góc với trục thực của hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Giải

Chọn $F_2(c; 0)$. Dây cung đi qua F_2 là MM' thì $F_2M' = -a+\frac{c}{a}c=\frac{c^2-a^2}{a}=\frac{b^2}{a}$

$$\Rightarrow MM'=2F_2M'=\frac{2b^2}{a}.$$

Bài 252. Cho hyperbol (H): $5x^2 - 4y^2 - 20 = 0$ và đường thẳng d: $x - y + m = 0$

a. Chứng minh d luôn cắt (H) tại hai điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau ($x_M < x_N$).

b. Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm $\left(x_{F_1} < x_{F_2}\right)$. Định m sao cho $3MF_1 = NF_2$.

Giải

(H): $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1 \Rightarrow a=2,\ b=\sqrt{5},\ c=3$.

a. Phương trình hoành độ giao điểm của (H) và d:

$5x^2 - 4(x + m)^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8mx - (4m^2 + 20) = 0$

Phương trình này chắc chắn có hai nghiệm phân biệt do $a = 1$, $c = -(4m^2 + 20)$ trái dấu nhau.

Ngoài ra: $x_M . x_N = -(4m^2 + 20) < 0 \Rightarrow$ M và N thuộc hai nhánh khác nhau.

b. $x_M + x_N = 8m$. M thuộc nhánh trái: $MF_1=-2-\frac{3}{2}x_M$

N thuộc nhánh phải: $NF_2=-2+\frac{3}{2}x_N$.

Theo yêu cầu bài toán:

$$3MF_1=NF_2 \Leftrightarrow -6-\frac{9}{2}x_M=-2+\frac{3}{2}x_N \Leftrightarrow \frac{9}{2}x_M+\frac{3}{2}x_N=-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(x_M + x_N) + 3x_M = -4 \quad \Leftrightarrow \frac{3}{2}.8m + 3\left(4m - \sqrt{20(m^2+1)}\right) = -4$$

$$\Leftrightarrow 24m - 3\sqrt{20(m^2+1)} = -4 \Leftrightarrow 24m + 4 = 3\sqrt{20(m^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{6} \\ 99m^2 + 48m - 41 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-8+\sqrt{515}}{33}.$$

Bài 253.

a. Viết phương trình của hyperbol (H) có hai tiêu điểm $F_1(-1; -2)$, $F_2(3; -2)$ và tâm sai $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

b. Tìm giao điểm của (H) với elip (E): $x2 + 5y^2 - 2x + 20y + 16 = 0$.

Giải

a. Gọi I là trung điểm F_1F_2: $I(1; -2)$.

$F_1F_2 = 4 \Rightarrow c = 2.$ $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \sqrt{3} \Rightarrow b^2 = 4 - 3 = 1$

Xét phép tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (1; -2)$: $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = -2 + Y \end{cases}$

Trong hệ IXY, (H) có phương trình $\frac{X^2}{3} - \frac{Y^2}{1} = 1$

Đưa về hệ Oxy: $\frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(y+2)^2}{1} = 1.$

b. (E): $x^2 + 5y^2 - 2x + 20y + 16 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + 5(y^2 + 4y + 4) = -16 + 1 + 20$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 5(y+2)^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{5} + (y+2)^2 = 1.$

Tọa độ giao điểm của (H) và (E) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{3} - (y+2)^2 = 1 \\ \frac{(x-1)^2}{5} + (y+2)^2 = 1 \end{cases}$

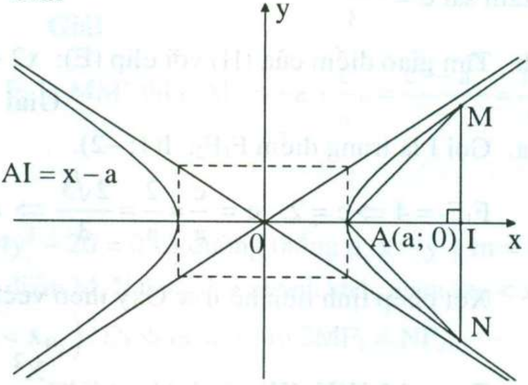
$$\Leftrightarrow \frac{8}{15}(x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = \frac{\sqrt{15}}{2} \\ x - 1 = -\frac{\sqrt{15}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \\ x = 1 - \frac{\sqrt{15}}{2} \end{array}\right.$$

$$(y+2)^2 = \frac{(x-1)^2}{3} - 1 = \frac{\frac{15}{4}}{3} - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+2=\frac{1}{2} \\ y+2=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{array}\right.$$

Các giao điểm cần tìm: $\left(1 \pm \frac{\sqrt{15}}{2}; -\frac{5}{2}\right), \left(1 \pm \frac{\sqrt{15}}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Bài 254. Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có A là đỉnh trên trục thực có hoành độ dương. Tìm tọa độ của các điểm M, N trên (H) sao cho AMN là tam giác đều.

Giải



$A(a; 0)$, $M\left(x; \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right)$, $I(x; 0)$

AMN là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{MAI} = 30^0$, $MI = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $AI = x - a$

Trong tam giác vuông MAI

cho $MI = AI.\tan 30^0$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = (x-a).\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right) = \frac{1}{3}(x-a)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2}(x+a) = \frac{1}{3}(x-a) \text{ (Do } x \neq a)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} - \frac{b^2}{a^2}\right)x = \frac{b^2}{a} + \frac{a}{3} \Leftrightarrow \frac{a^2 - 3b^2}{3a^2}x = \frac{3b^2 + a^2}{3a}$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2 - 3b^2\right)x = a\left(3b^2 + a^2\right) \Leftrightarrow x = \frac{a\left(3b^2 + a^2\right)}{a^2 - 3b^2}$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2\left(3b^2 + a^2\right)^2}{\left(a^2 - 3b^2\right)^2} - a^2} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2\left[\left(3b^2 + a^2\right)^2 - \left(a^2 - 3b^2\right)^2\right]}{\left(a^2 - 3b^2\right)^2}}$$

$$= \frac{b}{a}\frac{\sqrt{12a^4b^2}}{\left(a^2 - 3b^2\right)} = \frac{2\sqrt{3}ab^2}{a^2 - 3b^2}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{a\left(a^2+3b^2\right)}{a^2-3b^2};\frac{2\sqrt{3}\,ab^2}{a^2-3b^2}\right),\ N\left(\frac{a\left(a^2+3b^2\right)}{a^2-3b^2};-\frac{2\sqrt{3}ab^2}{a^2-3b^2}\right).$$

Bài 255. Cho hyperbol (H): $x^2-4y^2+4=0$

a. Tìm những điểm trên (H) có tọa độ nguyên.

b. Đường thẳng d qua A(4; 1) và cắt (H) tại hai điểm phân biệt sao cho A là trung tâm đoạn MN. Xác định tọa độ M, N.

Giải

a. $x^2-4y^2+4=0 \Leftrightarrow x^2-4y^2=-4 \Leftrightarrow (x-2y)(x+2y)=-4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=1\\x+2y=-4\end{cases}(1)\text{ hoặc: }\begin{cases}x-2y=-1\\x+2y=4\end{cases}(2)\text{ hoặc: }\begin{cases}x-2y=2\\x+2y=-2\end{cases}(3)\text{ hoặc: }\begin{cases}x-2y=-2\\x+2y=2\end{cases}(4)$$

(1), (2) không cho nghiệm nguyên. (3) cho $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$ (4) cho $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

$\Rightarrow$ Các điểm thuộc (H) có tọa độ nguyên là P(0; −1), Q(0; 1).

b. d: $y=k(x-4)+1$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (H):

$$x^2-4\left[kx-4k+1\right]^2+4=0 \Leftrightarrow \left(4k^2-1\right)x^2-8k\left(4k-1\right)x+32k\left(2k-1\right)=0\ (*)$$

$$x_M+x_N=\frac{8k\left(4k-1\right)}{4k^2-1}$$

Để A là trung điểm MN $\Leftrightarrow \dfrac{x_M+x_N}{2}=4 \Leftrightarrow x_M+x_N=8$

$$\Leftrightarrow \frac{8k\left(4k-1\right)}{4k^2-1}=8 \Leftrightarrow \frac{4k^2-k}{4k^2-1}=1 \Leftrightarrow k=1$$

Khi k = 1: (*) trở thành $3x^2-24x+32=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4-\frac{4}{3}\sqrt{3}\Rightarrow y=1-\frac{4}{3}\sqrt{3}\\x=4-\frac{4}{3}\sqrt{3}\Rightarrow y=1+\frac{4}{3}\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Vậy $M\left(4-\frac{4}{3}\sqrt{3};1-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$, $N\left(4+\frac{4}{3}\sqrt{3};1+\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$.

Bài 256. Cho hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ và đường thẳng d: Ax + By + C = 0. Biện luận theo A, B, C, a, b số giao điểm của d và (H).

Giải

(H): $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-Ax - C}{B} \Rightarrow$ Phương trình hoành độ giao điểm d và (H):

$$b^2x^2 - a^2\left(\frac{-Ax - C}{B}\right)^2 - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow B^2b^2x^2 - a^2\left(A^2x^2 + 2ACx + C^2\right) - a^2b^2B^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(B^2b^2 - a^2A^2\right)x^2 - 2ACa^2x - a^2C^2 - a^2b^2B^2 = 0$$

Phương trình này có: $\Delta' = A^2C^2a^4 + a^2\left(B^2b^2 - a^2A^2\right)\left(C^2 + b^2B^2\right)$

$$= a^2(A^2C^2a^2 + B^2C^2b^2 - A^2C^2a^2 + b^4B^4 - A^2B^2a^2b^2)$$

$$= a^2b^2B^2(C^2 + B^2b^2 - A^2a^2).$$

Dấu Δ' là dấu của $C^2 + B^2b^2 - A^2a^2$.

- Nếu $A^2a^2 - B^2b^2 > C^2$: d không cắt (H): số giao điểm: 0
- Nếu $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$: d tiếp xúc (H): số giao điểm: 1
- Nếu $A^2a^2 - B^2b^2 < C^2$: d cắt (H): số giao điểm: 2.

Bài 257. Lập phương trình tiếp tuyến của hyperbol (H): $x^2 - 4y^2 = 20$ tại giao điểm của (H) với đường thẳng d: $2x - y - 10 = 0$. Lưu ý:

- Nếu điểm $M(x_0; y_0) \in (H)$: dùng công thức tiếp tuyến tại M: $\dfrac{x_0.x}{a^2} - \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$.
- Nếu điểm $M(x_0; y_0) \notin (H)$: Viết phương trình đường thẳng d:

$y = k(x - x_0) + y_0$ rồi sử dụng điều kiện tiếp xúc $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$ để tìm k.

Giải

d: $2x - y - 10 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 10$. (H): $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (H):

$x^2 - 4(2x - 10)^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 160x + 420 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 32x + 84 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{14}{3} \\ x = 6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{2}{3} \\ y = 2 \end{array}\right.$$

- Tiếp tuyến tại $M\left(\dfrac{14}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$:

$$\frac{\frac{14}{3}x}{20} - \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)y}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{7x}{30} + \frac{2y}{15} - 1 = 0 \Leftrightarrow 7x + 4y - 30 = 0$$

- Tiếp tuyến tại N(6; 2): $\frac{6x}{20}+\frac{2y}{5}=1 \Leftrightarrow 3x+4y-10=0$.

Bài 258. Lập phương trình tiếp tuyến của hyperbol:

a. (H): $x^2-4y^2=20$ có hệ số góc bằng $\frac{3}{4}$.

b. (H): $5x^2-y^2-4=0$ song song với đường thẳng d: $5x-2y-1=0$.

c. (H): $4x^2-5y^2+20=0$ vuông góc với đường thẳng d: $3x+2y-1=0$.

d. (H): $x^2=4y^2+4$ biết tiếp tuyến lập với đường thẳng d: $x-2y+1=0$ một góc 45^0.

Giải

a. d có dạng $3x-4y+C=0$. (H): $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$

d tiếp xúc (H) $\Leftrightarrow 3^2.20-(-4)^2.5=C^2 \Leftrightarrow C^2=100 \Leftrightarrow C=\pm 10$.

Tiếp tuyến cần tìm: $3x-4y\pm 10=0$.

b. $5x^2-y^2=4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{5}}-\frac{y^2}{4}=1$.

Đường thẳng Δ song song với d có dạng $5x-2y+C=0$.

Δ tiếp xúc (H) $\Leftrightarrow 25.\frac{4}{5}-4.4=C^2 \Leftrightarrow C^2=4 \Leftrightarrow C=\pm 2$.

Các tiếp tuyến cần tìm: $5x-2y\pm 2=0$.

c. (H): $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$.

Δ vuông góc với d có dạng $2x-3y+C=0$

Δ tiếp xúc (H) $\Leftrightarrow -2^2.5+(-3)^2.4=C^2 \Leftrightarrow C^2=16 \Leftrightarrow C=\pm 4$.

Có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán: $2x-3y+4=0$; $2x-3y-4=0$.

d. $x^2=4y^2+4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-y^2=1 \Rightarrow a^2=4, b^2=1$.

Gọi Δ là đường thẳng $ax-y+b=0$. Δ có vectơ chỉ phương $\vec{b}=(1;a)$

d: $x-2y+1=0$: d có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2;1)$

Theo yêu cầu bài toán thì $(\Delta, d)=45^0 \Leftrightarrow \cos(\Delta, d)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|2+a|}{\sqrt{5}.\sqrt{1+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left|2+a\right| = \sqrt{5}.\sqrt{1+a^2} \Leftrightarrow 2\left(a^2+4a+4\right) = 5a^2+5$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 8a - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{3} \\ a = 3 \end{array}\right.$$

- Nếu $a = -\dfrac{1}{3}$: $\quad \Delta : -\dfrac{1}{3}x - y + b = 0$

  (Δ) tiếp xúc (H) $\Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2.4 - 1^2.1 = b^2$ (loại)

- Nếu a = 3: $\quad \Delta : 3x - y + b = 0$

  (Δ) tiếp xúc (H) $\Leftrightarrow 3^2.4 - 1^2.1 = b^2 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{35}$.

  Hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán: $3x - y + \sqrt{35} = 0$, $3x - y - \sqrt{35} = 0$.

Bài 259. Lập phương trình tiếp tuyến của hyperbol:

a. (H): $25x^2 - 164y^2 + 400 = 0$ xuất phát từ A(4; 1).

b. (H): $x^2 - 2y^2 = 4$ xuất phát từ B(2; 3).

c. (H): $5x^2 - 4y^2 - 20 = 0$ biết khoảng cách từ tâm của (H) đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{3}$.

Giải

a. (H): $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = -1$.

Gọi d là đường thẳng $y = k(x-4) + 1 \Leftrightarrow kx - y + 1 - 4k = 0$

(d) là tiếp tuyến của (H) khi và chỉ khi:

$$25(-1)^2 - k^2.16 = (1-4k)^2 \Leftrightarrow 32k^2 - 8k - 24 = 0 \Leftrightarrow 4k^2 - k - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$$

- $k = 1$ có tiếp tuyến: $x - y - 3 = 0$
- $k = -\dfrac{3}{4}$ có tiếp tuyến: $-\dfrac{3}{4} - y + 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 16 = 0$.

b. (H): $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2} = 1$. Gọi d là đường thẳng $y = k(x-2) + 3 \Leftrightarrow kx - y + 3 - 2k = 0$

d là tiếp tuyến của (H) $\Leftrightarrow k^2.4 - (-1)^2.2 = (2k-3)^2 \Leftrightarrow 4k^2 - 2 = 4k^2 - 12k + 9$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{11}{12}$.

Chỉ có một nghiệm k ⇒ có một tiếp tuyến có hệ số góc không xác định, tiếp tuyến này song song với trục Oy và qua B: đó là đường thẳng x = 2.

- Với $k = \dfrac{11}{12}$ có tiếp tuyến: $\dfrac{11}{12}x - y + 3 - \dfrac{22}{12} = 0 \Leftrightarrow 11x - 12y + 14 = 0$.

c. (H): $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$.

Tiếp tuyến cần tìm có dạng $ax - y + b = 0$ (d)

$d(0, a) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{3(a^2+1)}$

d là tiếp tuyến của (H) $\Leftrightarrow a^2.4 - (1)^2.5 = 3(a^2+1) \Leftrightarrow a^2 = 8 \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow b = \pm 3\sqrt{3}$.

Các tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán: $\pm 2\sqrt{2}x - y \pm 3\sqrt{3} = 0$.

Bài 260. Cho hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

a. d: $Ax + By + C = 0$ là một tiếp tuyến của (H). Tìm tọa độ tiếp điểm A, B, C, a, b.

b. Từ $M(x_1; y_1)$ kẻ hai tiếp tuyến với (H), tiếp xúc (H) tại P, Q. Viết phương trình đường thẳng PQ.

Giải

a. $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-Ax - C}{B}$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (H):

$$b^2x^2 - a^2\left(\frac{-Ax-C}{B}\right)^2 - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow \left(B^2b^2 - A^2a^2\right)x^2 - 2AC.a^2x - a^2\left(C^2 + B^2b^2\right) = 0 \ (*)$$

Khi d tiếp xúc (H), hoành độ tiếp điểm là nghiệm kép của (*).

$$x = \frac{AC.a^2}{B^2b^2 - A^2a^2} = -\frac{Aa^2}{C} \ \left(\text{Do } A^2a^2 - B^2b^2 = C^2\right),\ y = \frac{-A\left(-\dfrac{Aa^2}{C}\right) - C}{B} = \frac{Bb^2}{C}$$

Tiếp điểm $P\left(-\dfrac{Aa^2}{C}; \dfrac{Bb^2}{C}\right)$.

b. Phương trình tiếp tuyến tại P: $\dfrac{x_Px}{a^2} - \dfrac{y_Py}{b^2} - 1 = 0$ (T_1)

Phương trình tiếp tuyến tại Q: $\dfrac{x_Qx}{a^2} - \dfrac{y_Qy}{b^2} - 1 = 0$ (T_2)

(T_1) qua $M(x_1; y_1) \Leftrightarrow \dfrac{x_Px_1}{a^2} - \dfrac{y_Py_1}{b^2} - 1 = 0$ (1)

(T_2) qua $M(x_1; y_1) \Leftrightarrow \dfrac{x_Qx_1}{a^2} - \dfrac{y_Qy_1}{b^2} - 1 = 0$ (2)

(1) và (2) chứng tỏ tọa độ $(x_P; y_P)$, $(x_Q; y_Q)$ đều thỏa mãn chung phương trình:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow$ Phương trình đường thẳng PQ: $\dfrac{xx_1}{a^2} - \dfrac{yy_1}{b^2} = 1$.

Bài 261. Trên hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, hãy tìm điểm mà tiếp tuyến tại đó tạo với trục hoành góc $\dfrac{\pi}{3}$.

Giải

Gọi $M(x_0; y_0) \in (H) \Leftrightarrow y_0^2 = 9\left(\dfrac{x_0^2}{8} - 1\right)$

Phương trình tiếp tuyến tại M của (H): $\dfrac{x_0x}{8} - \dfrac{y_0y}{9} - 1 = 0$ (T)

(T) có hệ số góc $k = \dfrac{\frac{x_0}{8}}{\frac{y_0}{9}} = \dfrac{9x_0}{8y_0}$.

(T) tạo với trục hoành góc $\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \dfrac{9x_0}{8y_0} = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow 9x_0 = 8\sqrt{3}y_0 \Rightarrow 81x_0^2 = 64.3y_0^2 \Leftrightarrow 27x_0^2 = 64y_0^2 = 64.9\left(\frac{x_0^2}{8} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 27x_0^2 = 72x_0^2 - 64.9 \Leftrightarrow 5x_0^2 = 64 \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{8}{\sqrt{5}} \Rightarrow y_0 = \pm\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

Các điểm cần tìm: $M_1\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}}; \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$; $M_2\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}}; -\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$;

$$M_3\left(-\frac{8}{\sqrt{5}}; \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right); M_4\left(-\frac{8}{\sqrt{5}}; -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right).$$

Bài 262. Viết phương trình tiếp tuyến với hyperbol:

a. (H): $9y^2 - x^2 + 18y = 0$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $x - 5y + 2 = 0$. Tìm tọa độ tiếp điểm.

b. (H): $4x^2 - y^2 + 8x + 4y - 4 = 0$ biết tiếp tuyến qua A(0; 6). Viết phương trình đường thẳng qua hai tiếp điểm.

Giải

a. $9y^2 - x^2 + 18y = 0 \Leftrightarrow 9(y+1)^2 - x^2 = 9 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} - (y+1)^2 = -1$

Tịnh tiến hệ Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (0; -1)$: $\begin{cases} x = X \\ y = -1 + Y \end{cases}$

Phương trình (H) trong hệ IXY: $\dfrac{X^2}{9} - Y^2 = -1$.

Trong hệ IXY: đường thẳng $x - 5y + 2 = 0$ có phương trình:

$$X - 5(Y - 1) + 2 = 0 \Leftrightarrow X - 5Y + 7 = 0$$

Gọi Δ là đường thẳng $X - 5Y + C = 0$.

Δ tiếp xúc (H) $\Leftrightarrow 1^2.9 - (-5)^2.1 = -C^2 \Leftrightarrow C^2 = 16 \Leftrightarrow C = \pm 4$.

C = 4 có tiếp tuyến $X - 5Y + 4 = 0$ đưa về hệ Oxy:

$$x - 5(y + 1) + 4 = 0 \Leftrightarrow x - 5y - 1 = 0$$

C = –4 có tiếp tuyến $X - 5Y - 4 = 0$, đưa về hệ Oxy:

$$x - 5(y + 1) - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 5y - 9 = 0$$

- Tọa độ tiếp điểm của $x - 5y - 1 = 0$ và (H) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 5y - 1 = 0 \\ 9y^2 - x^2 + 18y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y + 1 \\ 9y^2 - (5y+1)^2 + 18y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y + 1 \\ 16y^2 - 8y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y + 1 \\ (4y - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{4} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

- Tọa độ tiếp điểm của $x - 5y - 9 = 0$ và (H) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 5y - 9 = 0 \\ 9y^2 - x^2 + 18y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y + 9 \\ 9y^2 - (5y+9)^2 + 18y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y + 9 \\ 16y^2 + 72y + 81 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y + 9 \\ (4y + 9)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{9}{4} \\ y = -\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

Có hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến song song với đường thẳng $x - 5y + 2 = 0$ và (H): $T_1\left(\dfrac{9}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$, $T_2\left(-\dfrac{9}{4}; -\dfrac{9}{4}\right)$.

b. $4x^2 - y^2 + 8x + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) = 4 + 4 - 4$

$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow (x+1)^2 - \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1.$

Tịnh tiến hệ Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (-1; 2)$: $\begin{cases} x = -1 + X \\ y = 2 + Y \end{cases}$

Trong hệ IXY, (H) có phương trình: $\quad X^2 - \dfrac{Y^2}{4} = 1$

Điểm A(0; 6) trong hệ IXY: A(1; 4).

Xét đường thẳng Δ: $Y = k(X - 1) + 4 \Leftrightarrow kX - Y + 4 - k = 0$

(Δ) tiếp xúc (H) $\Leftrightarrow k^2.1 - (-1)^2.4 = (4-k)^2 \Leftrightarrow 8k = 20 \Leftrightarrow k = \dfrac{5}{2}$.

Phương trình Δ: $\dfrac{5}{2}X - Y + 4 - \dfrac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 5X - 2Y + 3 = 0$

Đưa về hệ Oxy: $5(x+1) - 2(y-2) + 3 = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y + 12 = 0$

Vì A(1; 4): tiếp tuyến thứ 2 có hệ số góc không xác định và đi qua đỉnh của (H):

X = 1, đưa về hệ Oxy: $x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Giả sử (trong hệ IXY), hai tiếp điểm là $(X_1; Y_1)$, $(X_2; Y_2)$.

Tiếp tuyến của (H) tại $M(X_1; Y_1)$: $XX_1 - \dfrac{Y.Y_1}{4} - 1 = 0 \quad (T_1)$

Tiếp tuyến của (H) tại $N(X_2; Y_2)$: $XX_2 - \dfrac{Y.Y_2}{4} - 1 = 0 \quad (T_2)$

(T_1) qua A(1; 4) $\Leftrightarrow X_1 - Y_1 - 1 = 0$; (T_2) qua A(1; 4) $\Leftrightarrow X_2 - Y_2 - 1 = 0$

$\Rightarrow M(X_1; Y_1)$, $N(X_2; Y_2)$ đều thỏa mãn chung phương trình: $X - Y - 1 = 0$ nên đây là phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm.

Đưa về hệ Oxy: $(x+1) - (y-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$.

Bài 263. Cho hyperbol (H): $2x^2 - y^2 + 4 = 0$

a. Chứng minh qua A(–1; 1) có hai tiếp tuyến của (H) và hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng nối hai tiếp điểm.

b. Tìm những điểm trên trục hoành mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến của (H) vuông góc với nhau.

Giải

a. (H): $2x^2 - y^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{4} = -1$

Gọi d là đường thẳng $y = k(x+1) + 1 \Leftrightarrow kx - y + k + 1 = 0$

d tiếp xúc (H) $\Leftrightarrow 2k^2 - 4 = -(k+1)^2 \Leftrightarrow 3k^2 + 2k - 3 = 0$

Phương trình này chắc chắn có hai nghiệm $k_1 \neq k_2$ và $k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow$ Từ A(−1; 1) có hai tiếp tuyến kẻ đến (H) và hai tiếp tuyến vuông góc với nhau. Hai tiếp tuyến này là (T_1), (T_2).

Giả sử (T_1) tiếp xúc (H) tại $B(x_1\ y_1)$. Phương trình (T_1): $\dfrac{x_1x}{2}-\dfrac{y_1y}{4}+1=0$

(T_2) tiếp xúc (H) tại $C(x_2; y_2)$. (T_2) có phương trình: $\dfrac{x_2x}{2}-\dfrac{y_2y}{4}+1=0$

(T_1) qua A(−1; 1) $\Leftrightarrow -\dfrac{x_1}{2}-\dfrac{y_1}{4}+1=0$

(T_2) qua A(−1; 1) $\Leftrightarrow -\dfrac{x_2}{2}-\dfrac{y_2}{4}+1=0$

$\Rightarrow$ Tọa độ B và C đều thỏa mãn chung một phương trình: $-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}+1=0$

$\Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0\ (\Delta)$ là phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm B, C của (H).

$$d\big(A, (\Delta)\big) = \frac{\left|2.(-1)+1-4\right|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

b. Gọi M(m; 0) và d là đường thẳng $y = k(x - m) \Leftrightarrow kx - y - mk = 0$.
d là tiếp tuyến của (H) $\Leftrightarrow k^2.2 - 4 = -m^2k^2 \Leftrightarrow (m^2 + 2)k^2 = 4$

$$\Leftrightarrow k_1 = \frac{2}{\sqrt{m^2+2}},\ k_2 = \frac{-2}{\sqrt{m^2+2}}$$

Để hai tiếp tuyến vuông góc với nhau $\Leftrightarrow k_1 . k_2 = -1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{m^2+2}}.\dfrac{-2}{\sqrt{m^2+2}}=-1$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{m^2+2} = 1 \Leftrightarrow m^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}.$$

Có hai điểm trên trục hoành thỏa mãn yêu cầu bài toán: $M_1(\sqrt{2}\ ; 0)$, $M_2(-\sqrt{2}\ ; 0)$.

Bài 264. Tìm phương trình tiếp tuyến chung của:

a. (H_1): $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ và (H_2): $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=-1$.

b. (H): $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{7}=1$ và (E): $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.

c. (H): $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{7}=1$ và (C): $x^2 + y^2 = 1$.

Giải

a. Gọi $ax - y + b = 0$ là tiếp tuyến chung của (H_1) và (H_2).

$$\begin{matrix}\text{Tiếp xúc } (H_1) \Leftrightarrow 4a^2 - 3 = b^2 \\ \text{Tiếp xúc } (H_2) \Leftrightarrow 3a^2 - 4 = -b^2\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

Các tiếp tuyến chung cần tìm: $x + y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$

$x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

b. Giả sử $ax - y + b = 0$ là tiếp tuyến chung của (H) và (E).

$$\begin{matrix}\text{Tiếp xúc (H)} \Leftrightarrow 4a^2 - 7 = b^2 \\ \text{Tiếp xúc (E)} \Leftrightarrow 3a^2 + 1 = b^2\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 8 \\ b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2\sqrt{2} \\ b = \pm 5 \end{cases}$$

Các tiếp tuyến chung của (H) và (E):

$2\sqrt{2}x + y + 5 = 0$; $2\sqrt{2}x + y - 5 = 0$; $2\sqrt{2}x - y + 5 = 0$; $2\sqrt{2}x - y - 5 = 0$.

c. Giả sử $ax - y + b$ là tiếp tuyến chung:

Tiếp xúc (H) $\Leftrightarrow 2a^2 - 7 = b^2$ (1)

Tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \dfrac{|b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1$ (2)

(2) $\Leftrightarrow b^2 = a^2 + 1$ thế vào (1): $2a^2 - 7 = a^2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 8 \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{2} \\ b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm 3 \end{cases}$

Các tiếp tuyến chung của (H) và (C):

$2\sqrt{2}x + y + 3 = 0$; $2\sqrt{2}x + y - 3 = 0$; $2\sqrt{2}x - y + 3 = 0$; $2\sqrt{2}x - y - 3 = 0$.

Bài 265. Lập phương trình của hyperbol (H):

a. Tâm O, tiêu điểm trên Ox, tiếp xúc với đường thẳng $3x - 4y - 10 = 0$ tại điểm có hoành độ bằng 6.

b. Trục thực Ox, phương trình các tiệm cận là $y = \pm\dfrac{1}{2}x$ và phương trình một tiếp tuyến là $5x - 6y - 8 = 0$.

c. Có các trục trùng với các trục tọa độ và tiếp xúc với các đường thẳng:

$5x - 6y - 16 = 0$; $13x - 10y - 48 = 0$.

d. Qua $M(\sqrt{6}\,; 3)$, tiếp xúc với đường thẳng $9x + 2y - 15 = 0$.

Giải

a. Phương trình (H) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(H) tiếp xúc $3x - 4y - 10 = 0 \Leftrightarrow 9a^2 - 16b^2 = 100$. (1)

Thế $x = 6$ vào phương trình $3x - 4y - 10 = 0$ được $y = 2$

$\Leftrightarrow$ Điểm M(6; 2) là tiếp điểm và thuộc (H) $\Leftrightarrow \dfrac{36}{a^2} - \dfrac{4}{b^2} = 1$ (2)

Thế $b^2 = \dfrac{4a^2}{36-a^2}$ vào (1): $9a^2 - 16.\dfrac{4a^2}{36-a^2} = 100 \Leftrightarrow 9a^4 - 360a^2 + 3600 = 0$

$\Leftrightarrow 9(a^2-20)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 20 \Rightarrow b^2 = 5.$

Phương trình (H): $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$.

b. Tiệm cận $y = \pm\dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{2}a$.

Tiếp tuyến là $5x - 6y - 8 = 0 \Leftrightarrow 25a^2 - 36b^2 = 64$

Thế $b = \dfrac{1}{2}a \Rightarrow 25a^2 - 36.\left(\dfrac{a^2}{4}\right) = 64 \Leftrightarrow 16a^2 = 64 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Rightarrow b^2 = 1$

Phương trình (H): $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

c. Phương trình (H) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

- Tiếp xúc $5x - 6y - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow 25a^2 - 36b^2 = 256$
- Tiếp xúc $13x - 10y - 48 = 0 \quad \Leftrightarrow 169a^2 - 100b^2 = 2304$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{-57344}{-3584} = 16 \\ b^2 = \dfrac{-14336}{-3584} = 4 \end{cases}$. Vậy phương trình (H): $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

d. Phương trình (H) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(H) qua M($\sqrt{6}$; 3) $\Leftrightarrow \dfrac{6}{a^2} - \dfrac{9}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = \dfrac{9a^2}{6-a^2}$

(H) tiếp xúc $9x + 2y - 15 = 0 \Leftrightarrow 81a^2 - 4b^2 = 225$ (*)

Thế $b^2 = \dfrac{9a^2}{6-a^2}$ vào (*): $81a^2 - 4.\dfrac{9a^2}{6-a^2} = 225 \Leftrightarrow 9a^2 - \dfrac{4a^2}{6-a^2} = 25$

$\Leftrightarrow 9a^4 - 75a^2 + 150 = 0 \Leftrightarrow 3a^4 - 25a^2 + 50 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = \dfrac{10}{3} \Rightarrow b^2 = \dfrac{45}{4} \\ a^2 = 5 \quad \Rightarrow b^2 = 45 \end{array}\right.$

Có hai hyperbol thỏa mãn yêu cầu bài toán: $\dfrac{3x^2}{10} - \dfrac{4y^2}{45} = 1$; $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{45} = 1$.

Bài 266. Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và điểm $M(x_1; y_1)$. Biện luận theo a, b, x_1, y_1 số tiếp tuyến của (H) qua M.

Giải

Gọi d là đường thẳng $kx - y + y_1 - kx_1 = 0$

d tiếp xúc (H) $\Leftrightarrow a^2k^2 - b^2 = (y_1 - kx_1)^2 \Leftrightarrow (a^2 - x_1^2)k^2 + 2x_1y_1k - (b^2 + y_1^2) = 0$

Phương trình này có: $\Delta' = x_1^2y_1^2 + (a^2 - x_1^2)(b^2 + y_1^2) = a^2b^2 - b^2x_1^2 + a^2y_1^2$

Số tiếp tuyến phụ thuộc vào dấu của Δ':

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow a^2y_1^2 - b^2x_1^2 + a^2b^2 > 0 \Leftrightarrow b^2x_1^2 - a^2y_1^2 - a^2b^2 < 0$

$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} < 1$: có 2 tiếp tuyến.

$\Delta' = 0 : \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ hoặc $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \neq 0$: có 1 tiếp tuyến.

$\Delta' < 0: \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} > 1$ hoặc $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 0$: không có tiếp tuyến.

Bài 267. Từ điểm M(m; n) kẻ hai tiếp tuyến của (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, tiếp xúc (H) tại P, Q. Viết phương trình đường tròn MPQ.

Giải

Giả sử $P(x_P; y_P)$, $Q(x_Q; y_Q)$.

Phương trình tiếp tuyến (T_1) của (H) tại P: $\frac{x_Px}{a^2} - \frac{y_Py}{b^2} - 1 = 0$

Phương trình tiếp tuyến (T_2) của (H) tại Q: $\frac{x_Qx}{a^2} - \frac{y_Qy}{b^2} - 1 = 0$

(T_1) qua M(m; n) $\Leftrightarrow \frac{x_P.m}{a^2} - \frac{y_P.n}{b^2} - 1 = 0$

(T_2) qua M(m; n) $\Leftrightarrow \frac{x_Q.m}{a^2} - \frac{y_Q.n}{b^2} - 1 = 0$

⇒ Tọa độ P, Q thỏa mãn chung phương trình: $\frac{mx}{a^2} - \frac{ny}{b^2} = 1$ (*)

Nên (*) là phương trình đường thẳng PQ.

$(*) \Leftrightarrow \frac{ny}{b^2} = \frac{mx}{a^2} - 1 = \frac{mx - a^2}{a^2} \Leftrightarrow y = \frac{b^2}{na^2}(mx - a^2)$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng PQ và hyperbol (H):

$$b^2x^2-a^2\left[\frac{b^2}{na^2}\left(mx-a^2\right)\right]^2-a^2b^2=0 \Leftrightarrow b^2x^2-\frac{b^4}{a^2n^2}\left(m^2x^2-2a^2mx+a^4\right)-a^2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{b^2}{a^2n^2}\left(m^2x^2-2a^2mx+a^4\right)-a^2=0 \Leftrightarrow \left(a^2n^2-b^2m^2\right)x^2+2a^2b^2mx-a^4\left(b^2+n^2\right)=0$$

$$\Delta'=a^4b^4m^2+a^4\left(a^2n^2-b^2m^2\right)\left(b^2+n^2\right)=a^4\left(b^4m^2+a^2b^2n^2+a^2n^4-b^4m^2-b^2m^2n^2\right)$$

$$=a^4n^2\left(a^2b^2+a^2n^2-b^2m^2\right) \Rightarrow \sqrt{\Delta'}=a^2n\sqrt{a^2b^2+a^2n^2-b^2m^2}$$

$\left(a^2b^2+a^2n^2-b^2m^2>0 \text{ do } M(m;n) \text{ nằm bên ngoài } (H)\right)$

$$\Rightarrow x_P=\frac{-a^2b^2m-a^2n.\sqrt{a^2b^2+a^2n^2-b^2m^2}}{a^2n^2-b^2m^2}$$

$$=-\frac{a^2}{a^2n^2-b^2m^2}\left(b^2m+n.\sqrt{a^2b^2+a^2n^2-b^2m^2}\right)$$

$$\Rightarrow y_P=\frac{-b^2}{a^2n^2-b^2m^2}\left(a^2n+m\sqrt{a^2b^2+a^2n^2-b^2m^2}\right)$$

$$\Rightarrow x_Q=\frac{-a^2b^2m+a^2n\sqrt{a^2b^2+a^2n^2-b^2m^2}}{a^2n^2-b^2m^2}$$

$$=-\frac{a^2}{a^2n^2-b^2m^2}\left(b^2m-n\sqrt{a^2b^2+a^2n^2-b^2m^2}\right)$$

$$\Rightarrow y_Q=\frac{-b^2}{a^2n^2-b^2m^2}\left(a^2n-m\sqrt{a^2b^2+a^2n^2-b^2m^2}\right)$$

Phương trình đường tròn MPQ có dạng: $x^2+y^2-2Ax-2By+C=0$

qua P $\Leftrightarrow x_P{}^2+y_P{}^2-2Ax_P-2By_P+C=0$ (1)

qua Q $\Leftrightarrow x_Q{}^2+y_Q{}^2-2Ax_Q-2By_Q+C=0$ (2)

qua M $\Leftrightarrow m^2+n^2-2Am-2Bn+C=0$ (3)

Trừ từng vế (1) và (2): $\left(x_P{}^2-x_Q{}^2\right)+\left(y_P{}^2-y_Q{}^2\right)-2A\left(x_P-x_Q\right)-2B\left(y_P-y_Q\right)=0$

Trừ từng vế (1) và (3): $\left(x_P{}^2-m^2\right)+\left(y_P{}^2-n^2\right)-2A(x_P-m)-2B(y_P-n)=0$

$$(3) \Leftrightarrow C=2Am+2Bn-\left(m^2+n^2\right)$$

Do x_P, x_Q là hai nghiệm của $(a^2n^2-b^2m^2)x^2+2a^2b^2mx-a^4(b^2+n^2)=0$

nên: $x_P{}^2 = \dfrac{-2a^2b^2m}{a^2n^2-b^2m^2}.x_P + \dfrac{a^4\left(b^2+n^2\right)}{a^2n^2-b^2m^2}$

$$x_Q{}^2 = \frac{-2a^2b^2m}{a^2n^2-b^2m^2}.x_Q + \frac{a^4\left(b^2+n^2\right)}{a^2n^2-b^2m^2}$$

$$\Rightarrow x_P{}^2 - x_Q{}^2 = \frac{-2a^2b^2m}{a^2n^2-b^2m^2}\left(x_P - x_Q\right)$$

Từ phương trình đường thẳng PQ: $y = \dfrac{b^2m}{a^2n}x - \dfrac{b^2}{n}$

$$\Rightarrow y_P{}^2 = \frac{b^4m^2}{a^4n^2}.x_P{}^2 - \frac{2b^4m}{a^2n^2}.x_P + \frac{b^4}{n^2}; \quad y_Q{}^2 = \frac{b^4m^2}{a^4n^2}.x_Q{}^2 - \frac{2b^4m}{a^2n^2}.x_Q + \frac{b^4}{n^2}$$

$$\Rightarrow y_P{}^2 - y_Q{}^2 = \frac{b^4m^2}{a^4n^2}.\left(x_P{}^2 - x_Q{}^2\right) - \frac{2b^4m}{a^2n^2}.\left(x_P - x_Q\right)$$

$$= \left(x_P - x_Q\right)\left[\frac{b^4m^2}{a^4n^2}\left(x_P + x_Q\right) - \frac{2b^4m}{a^2n^2}\right]$$

$$= \left(x_P - x_Q\right)\left[\frac{b^4m^2}{a^4n^2}.\left(\frac{-2a^2b^2m}{a^2n^2-b^2m^2}\right) - \frac{2b^4m}{a^2n^2}\right] = \frac{2b^4m\left(x_P - x_Q\right)}{b^2m^2-a^2n^2}$$

A, B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\left(x_P - x_Q\right).A + 2\left(y_P - y_Q\right).B = \left(x_P{}^2 - x_Q{}^2\right) + \left(y_P{}^2 - y_Q{}^2\right) \\ 2\left(x_P - m\right).A + 2\left(y_P - n\right).B = x_P{}^2 - m^2 + y_P{}^2 - n^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{b^2m\left(m^2+n^2+c^2\right)}{2\left(b^2m^2-a^2n^2\right)} \\ B = -\dfrac{a^2n\left(m^2+n^2-c\right)}{2\left(b^2m^2-a^2n^2\right)} \end{cases} \Rightarrow C = \frac{b^2m^2+a^2n^2}{b^2m^2-a^2n^2}.c^2$$

Phương trình đường tròn MPQ:

$$x^2 + y^2 - \frac{b^2m\left(m^2+n^2+c^2\right)}{b^2m^2-a^2n^2}x + \frac{a^2n\left(m^2+n^2-c\right)}{b^2m^2-a^2n^2}y + \frac{\left(b^2m^2+a^2n^2\right)}{b^2m^2-a^2n^2}.c^2 = 0$$

♦ Lời bình: Hãy luyện tập đức tính kiên trì, cần cù, có chí thì nên từ lời giải củ bài tập này!

Bài 268. Cho hyperbol (H): $x.y = \gamma^2$ $(\gamma > 0)$

a. Xác định tọa độ tiêu điểm phương trình các đường chuẩn của (H);

b. Tìm điều kiện để d: y = mx + n tiếp xúc (H).

Giải

a. Các đỉnh A_1, A_2 của (H) có hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$\frac{\gamma^2}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = \gamma^2 \Leftrightarrow x = \pm\gamma.$$

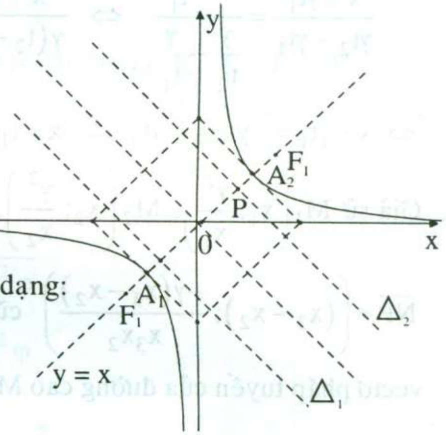
$\Rightarrow$ (H) có $a = b = \gamma$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 2\gamma^2 \Leftrightarrow c = \gamma\sqrt{2}$.

Các tiêu điểm F_1, F_2 đều ở trên đường thẳng y = x

$\Rightarrow F_1\left(-\gamma\sqrt{2}; -\gamma\sqrt{2}\right)$; $F_2\left(\gamma\sqrt{2}; \gamma\sqrt{2}\right)$.

Tỉ số $\dfrac{a^2}{c} = \dfrac{\gamma^2}{\gamma\sqrt{2}} = \dfrac{\gamma}{\sqrt{2}}$.



Các đường chuẩn song song với đường thẳng y = −x và đi qua điểm $\left(\pm\dfrac{\gamma}{\sqrt{2}}; \pm\dfrac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)$:

Phương trình các đường chuẩn Δ_1, Δ_2 có dạng: $x + y + c = 0$ qua $\left(\pm\dfrac{\gamma}{\sqrt{2}}; \pm\dfrac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)$

$$\Leftrightarrow \pm\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{2}} + c = 0 \Leftrightarrow c = \pm\gamma\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Phương trình $\Delta_1: y = -x - \gamma\sqrt{2}$, $\Delta_2: y = -x + \gamma\sqrt{2}$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (H):

$$\frac{\gamma^2}{x} = mx + n \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ mx^2 + nx - \gamma^2 = 0 \end{cases}$$

Để d tiếp xúc (H) thì $\Delta = n^2 + 4m.\gamma^2 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{n^2}{4\gamma^2}$ $(\neq 0)$.

Bài 269. Cho hyperbol vuông (H): $x.y = \gamma^2$ $(\gamma > 0)$

a. Chứng minh một dạng phương trình tham số của (H) là: $\begin{cases} x = \gamma t \\ y = \dfrac{\gamma}{t} \end{cases}$ $\left(t \in R \setminus \{0\}\right)$

b. Cho hai điểm $M_1\left(\gamma t_1; \dfrac{\gamma}{t_1}\right)$, $M_2\left(\gamma t_2; \dfrac{\gamma}{t_2}\right)$ thuộc (H). Viết phương trình đường M_1M_2.

c. Cho tam giác MNP nội tiếp hyperbol (H) (tức là các đỉnh của tam giác nằm trên (H). Chứng minh trực tâm K của tam giác MNP cũng thuộc (H).

Giải

a. Từ $\begin{cases} x = \gamma t \\ y = \dfrac{\gamma}{t} \end{cases} \Rightarrow x.y = \gamma t.\dfrac{\gamma}{t} = \gamma^2 \Rightarrow$ đpcm.

b. $M_1\left(\gamma t_1; \dfrac{\gamma}{t_1}\right)$, $M_2\left(\gamma t_2; \dfrac{\gamma}{t_2}\right)$, phương trình đường thẳng M_1M_2:

$$\frac{x-\gamma t_1}{\gamma t_2-\gamma t_1}=\frac{y-\dfrac{\gamma}{t_1}}{\dfrac{\gamma}{t_2}-\dfrac{\gamma}{t_1}} \Leftrightarrow \frac{x-\gamma t_1}{\gamma(t_2-t_1)}=\frac{\dfrac{yt_1-\gamma}{t_1}}{\gamma\left(\dfrac{t_1-t_2}{t_1+t_2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x-\gamma t_1=-yt_1t_2+\gamma t_2 \Leftrightarrow x+t_1t_2y-\gamma(t_1+t_2)=0$$

c. Giả sử $M_1\left(x_1; \dfrac{\gamma^2}{x_1}\right)$, $M_2\left(x_2; \dfrac{\gamma^2}{x_2}\right)$, $P\left(x_3; \dfrac{\gamma^2}{x_3}\right)$.

$\overrightarrow{NP}=\left((x_3-x_2); \dfrac{-\gamma(x_3-x_2)}{x_3x_2}\right)$ cùng phương với $\vec{m}=\left(1; \dfrac{-\gamma^2}{x_2x_3}\right)$ chọn làm vectơ pháp tuyến của đường cao MK.

Phương trình đường cao MK có dạng: $x-\dfrac{\gamma^2}{x_2x_3}y+C=0$

qua M $\Leftrightarrow x_1-\dfrac{\gamma^2}{x_2x_3}.\dfrac{\gamma^2}{x_1}+C=0 \Leftrightarrow C=-x_1+\dfrac{\gamma^4}{x_1x_2x_3}$

Phương trình đường cao MK: $\quad x-\dfrac{\gamma^2}{x_2x_3}y-x_1+\dfrac{\gamma^4}{x_1x_2x_3}=0 \quad (1)$

Tương tự phương trình đường cao NK: $\quad x-\dfrac{\gamma^2}{x_1x_3}y-x_2+\dfrac{\gamma^4}{x_1x_2x_3}=0 \quad (2)$

Trừ từng vế (1) và (2): $\quad \dfrac{\gamma^2(x_2-x_1)}{x_1x_2x_3}y+(x_2-x_1)=0$

$\Leftrightarrow y_K=\dfrac{-x_1x_2x_3}{\gamma^2} \Rightarrow x_K=-\dfrac{\gamma^4}{x_1x_2x_3} \Rightarrow x_K.y_K=\gamma^2 \Leftrightarrow K\in(H)$.

Bài 270. Cho điểm M có tọa độ $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\varphi} \\ y = b\tan\varphi \end{cases}$ với a, b > 0 cho trước và φ thay đổi, $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

a. Chứng minh điểm M chạy trên một hyperbol (H) cố định.

b. Gọi I, P, Q là vị trí của M ứng với φ bằng 0, λ, θ và K(0; kb) với $k \in \mathbb{R}$ $(P \equiv Q)$

i. Chứng minh P, Q, K thẳng hàng $\Leftrightarrow \cos\dfrac{\lambda+\theta}{2} + k\sin\dfrac{\lambda+\theta}{2} = 0$.

ii. Giả sử P, Q, K thẳng hàng và đường thẳng IK cắt (H) tại S $(S \equiv I)$./Tính tọa độ S theo λ, θ.

c. Lấy A, B, C thuộc (H) sao cho BC, CA, AB cắt Oy tại K_1, K_2, K_3; IK_1, IK_2, IK_3 cắt (H) tại A_1, B_1, C_1 (A_1, B_1, C_1 không trùng I). Chứng minh các đường thẳng AA_1, BB_1 và CC_1 đồng quy tại một điểm trên Oy.

Giải

a. $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\varphi} \\ y = b\tan\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{\cos\varphi} \\ \dfrac{y}{b} = \tan\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{1}{\cos^2\varphi} \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \tan^2\varphi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi} - \tan^2\varphi = 1 + \tan^2\varphi - \tan^2\varphi = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{M thuộc } (H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

b. I(a; 0), $P\left(\dfrac{a}{\cos\lambda}; b\tan\lambda\right)$, $Q\left(\dfrac{a}{\cos\theta}; b\tan\theta\right)$

i. K(0; kb); $\overrightarrow{PQ} = \left(\dfrac{a}{\cos\theta} - \dfrac{a}{\cos\lambda}; b\tan\theta - b\tan\lambda\right)$; $\overrightarrow{PK} = \left(-\dfrac{a}{\cos\lambda}; kb - b\tan\lambda\right)$

P, Q, K thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}$ cùng phương $\overrightarrow{PK}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{\cos\theta} - \frac{a}{\cos\lambda}\right)(kb - b\tan\lambda) = -\frac{a}{\cos\lambda}(b\tan\theta - b\tan\lambda)$$

$$\Leftrightarrow ab\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\lambda}\right)(k - \tan\lambda) = -\frac{ab}{\cos\lambda}(\tan\theta - \tan\lambda)$$

$$\Leftrightarrow ab\left(\frac{k}{\cos\theta} - \frac{k}{\cos\lambda} - \frac{\tan\lambda}{\cos\theta} + \frac{\tan\lambda}{\cos\lambda}\right) = ab\left(\frac{\tan\lambda}{\cos\lambda} - \frac{\tan\theta}{\tan\lambda}\right)$$

$$\Leftrightarrow k\frac{\cos\lambda-\cos\theta}{\cos\theta.\cos\lambda}=\frac{\tan\lambda\cos\lambda-\tan\theta\cos\theta}{\cos\theta.\cos\lambda}$$

$$\Leftrightarrow -2k.\sin\frac{\lambda+\theta}{2}.\sin\frac{\lambda-\theta}{2}=\sin\lambda-\sin\theta=2\cos\frac{\lambda+\theta}{2}.\sin\frac{\lambda-\theta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\lambda+\theta}{2}+k\sin\frac{\lambda+\theta}{2}=0.$$

ii. Từ $\cos\frac{\lambda+\theta}{2}+k\sin\frac{\lambda+\theta}{2}=0 \Leftrightarrow k=-\cot\frac{\lambda+\theta}{2} \Rightarrow k^2=\cot^2\frac{\lambda+\theta}{2}$.

$I(a;0)$, $K(0;kb) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng IK:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{kb}=1 \Leftrightarrow y=\frac{kb}{a}(a-x)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của IK và (H):

$$b^2x^2-a^2.\frac{k^2b^2}{a^2}(a-x)^2-a^2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2-k^2b^2x^2+2ak^2b^2x-a^2k^2b^2-a^2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-k^2\right)x^2+2ak^2x-a^2\left(1+k^2\right)=0$$

$$\Delta'=a^2k^4+a^2\left(1-k^4\right)=a^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=\dfrac{a\left(k^2+1\right)}{k^2-1}=\dfrac{a.\left(\cot^2\dfrac{\lambda+\theta}{2}+1\right)}{\cot^2\dfrac{\lambda+\theta}{2}-1}=\dfrac{a}{\cos(\lambda+\theta)} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow y=b\tan(\lambda+\theta) \Rightarrow S\left(\frac{a}{\cos(\lambda+\theta)};b\tan(\lambda+\theta)\right).$$

c. Gọi $A\left(\dfrac{a}{\cos\alpha};b\tan\alpha\right)$, $B\left(\dfrac{a}{\cos\beta};b\tan\beta\right)$, $C\left(\dfrac{a}{\cos\gamma};b\tan\gamma\right)$

Phương trình đường thẳng BC: $\dfrac{x-\dfrac{a}{\cos\beta}}{\dfrac{a}{\cos\gamma}-\dfrac{a}{\cos\beta}}=\dfrac{y-b\tan\beta}{b\tan\gamma-b\tan\beta}$

Khi $x=0 \Rightarrow -\dfrac{ab.\tan\gamma}{\cos\beta}+ab\dfrac{\tan\beta}{\cos\beta}=\dfrac{a(\cos\beta-\cos\gamma)}{\cos\gamma.\cos\cos\beta}y-\dfrac{ab\tan\beta}{\cos\gamma}+\dfrac{ab\tan\beta}{\cos\beta}$

$$\Leftrightarrow \frac{a(\cos\beta-\cos\gamma)}{\cos\beta.\cos\gamma}.y=ab\left(\frac{\tan\beta}{\cos\gamma}-\frac{\tan\gamma}{\cos\beta}\right)=ab\frac{\sin\beta-\sin\gamma}{\cos\beta.\cos\gamma}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{b(\sin\beta-\sin\gamma)}{\cos\beta-\cos\gamma}=\frac{2b\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right).\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{-2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}=-b\cot\frac{\beta+\gamma}{2}$$

$\Rightarrow K_1\left(0;-b\cot\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$ Tương tự $K_2\left(0;-b\cot\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$; $K_3\left(0;-b\cot\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

I(a; 0) là một đỉnh của (H).

Phương trình đường thẳng IK_1: $\frac{x}{a}-\frac{y}{b\cot\frac{\beta+\gamma}{2}}=1\Leftrightarrow y=\frac{b\cot\frac{\beta+\gamma}{2}}{a}(x-a)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của IK_1 và (H):

$$b^2x^2-a^2.\frac{b^2\cot^2\frac{\beta+\gamma}{2}}{a^2}\left(x^2-2ax+a^2\right)-a^2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-\cot^2\frac{\beta+\gamma}{2}.x^2+2a\cot^2\frac{\beta+\gamma}{2}x-a^2\left(1+\cot^2\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\cot^2\frac{\beta+\gamma}{2}\right)x^2+2a\cot^2\frac{\beta+\gamma}{2}x-a^2\left(1+\cot^2\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=0$$

$$\Delta'=a^2.\cot^4\frac{\beta+\gamma}{2}+a^2\left(1-\cot^2\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\left(1+\cot^2\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=a^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-a.\cot^2\frac{\beta+\gamma}{2}-a}{1-\cot^2\frac{\beta+\gamma}{2}}=\dfrac{a.\left(\cot^2\frac{\beta+\gamma}{2}+1\right)}{\cot^2\frac{\beta+\gamma}{2}-1}=\dfrac{a}{\cos(\beta+\gamma)}\\ x_2=a\ (\text{loại})\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow A_1\left(\frac{a}{\cos(\beta+\gamma)};b\tan(\beta+\gamma)\right)$$

Tương tự: $B_1\left(\frac{a}{\cos(\gamma+\alpha)};b\tan(\gamma+\alpha)\right)$; $C_1\left(\frac{a}{\cos(\alpha+\beta)};b\tan(\alpha+\beta)\right)$

Từ kết quả đã tính toán ở đầu câu c):

$\Rightarrow AA_1$ cắt Oy tại $P_1\left(0;-b\cot\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)$

BB_1 cắt Oy tại $P_2\left(0;-b\cot\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)$

CC_1 cắt Oy tại $P_3\left(0;-b\cot\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)$

$\Rightarrow P_1\equiv P_2\equiv P_3 \Leftrightarrow AA_1, BB_1, CC_1$ đồng quy tại $P\left(0;-b\cot\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)$.

Bài 271. Cho hyperbol vuông (H): $xy=\gamma^2$ ($\gamma>0$) và bốn điểm $M_i\left(\gamma t_i;\dfrac{\gamma}{t_i}\right)$ ($i=1;2;3;4$) nằm trên (H).

a. Chứng minh M_1, M_2, M_3, M_4 thuộc một đường tròn $\Leftrightarrow t_1.t_2.t_3.t_4=1$.

b. Tìm tọa độ tâm đường tròn $(M_1M_2M_3)$ theo γ, t_1, t_2, t_3.

Giải

a. $M_1\left(\gamma t_1;\dfrac{\gamma}{t_1}\right), M_2\left(\gamma t_2;\dfrac{\gamma}{t_2}\right), M_3\left(\gamma t_3;\dfrac{\gamma}{t_3}\right), M_4\left(\gamma t_4;\dfrac{\gamma}{t_4}\right)$.

Gọi (C) là đường tròn có phương trình: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

$$M_1\in(C)\Leftrightarrow \gamma^2{t_1}^2+\frac{\gamma^2}{{t_1}^2}-2a.\gamma t_1-\frac{2b\gamma}{t_1}+c=0 \quad (1)$$

$$M_2\in(C)\Leftrightarrow \gamma^2{t_2}^2+\frac{\gamma^2}{{t_2}^2}-2a.\gamma t_2-\frac{2b\gamma}{t_2}+c=0 \quad (2)$$

$$M_3\in(C)\Leftrightarrow \gamma^2{t_3}^2+\frac{\gamma^2}{{t_3}^2}-2a.\gamma t_3-\frac{2b\gamma}{t_3}+c=0 \quad (3)$$

Trừ từng vế (1) và (2):

$$\gamma^2\left({t_1}^2-{t_2}^2\right)+\gamma^2\left(\frac{1}{{t_1}^2}-\frac{1}{{t_2}^2}\right)-2a\gamma(t_1-t_2)-2b\gamma\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2(t_1-t_2)(t_1+t_2)-\gamma^2\frac{(t_1-t_2)(t_1+t_2)}{{t_1}^2{t_2}^2}-2a\gamma(t_1-t_2)+2b\gamma\frac{(t_1-t_2)}{t_1t_2}=0$$

$$\Leftrightarrow \gamma(t_1+t_2)-\frac{\gamma(t_1+t_2)}{{t_1}^2{t_2}^2}-2a+\frac{2b}{{t_1}^2{t_2}^2}=0 \Leftrightarrow a-\frac{b}{t_1t_2}=\frac{\gamma}{2}(t_1+t_2)\left(1-\frac{1}{{t_1}^2{t_2}^2}\right) \quad (5)$$

Lấy từng vế (1) – (3) cũng có: $a-\dfrac{b}{t_1t_3}=\dfrac{\gamma}{2}(t_1+t_3)\left(1-\dfrac{1}{{t_1}^2{t_3}^2}\right)$ (6).

Hệ (5) và (6) cho:

$$\left(\frac{1}{t_1t_3}-\frac{1}{t_1t_2}\right)b=\frac{\gamma}{2}\left(t_1+t_2-\frac{1}{t_1t_2^2}-\frac{1}{t_1^2.t_2}-t_1-t_3+\frac{1}{t_1t_3^2}+\frac{1}{t_1^2.t_3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t_2-t_3)}{t_1t_2t_3}b=\frac{\gamma}{2}\left[(t_2-t_3)+\frac{1}{t_1}\left(\frac{1}{t_3^2}-\frac{1}{t_2^2}\right)+\frac{1}{t_1^2}\left(\frac{1}{t_3}-\frac{1}{t_2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t_2-t_3)}{t_1t_2t_3}b=(t_2-t_3).\frac{\gamma}{2}\left[1+\frac{1}{t_1}.\frac{(t_2+t_3)}{t_2^2.t_3^2}+\frac{1}{t_1^2}\left(\frac{1}{t_2t_3}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow b=\frac{\gamma}{2}\left[t_1t_2t_3+\frac{t_1t_2t_3}{t_1}\left(\frac{t_2+t_3}{t_2^2.t_3^2}\right)+\frac{t_1t_2t_3}{t_1^2.t_2t_3}\right]\Leftrightarrow b=\frac{\gamma}{2}\left[t_1t_2t_3+\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right].$$

$$a=\frac{b}{t_1t_2}+\frac{\gamma}{2}(t_1+t_2)\left(1-\frac{1}{t_1^2.t_2^2}\right)=\frac{\gamma}{2}\left(t_1t_2t_3+\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right).\frac{1}{t_1t_2}+\frac{\gamma}{2}\left(t_1+t_2-\frac{1}{t_1t_2^2}-\frac{1}{t_1^2.t_2}\right)$$

$$=\frac{\gamma}{2}\left(t_3+\frac{1}{t_1^2t_2}+\frac{1}{t_1t_2^2}+\frac{1}{t_1t_2t_3}+t_1+t_2-\frac{1}{t_1t_2^2}-\frac{1}{t_1^2t_2}\right)=\frac{\gamma}{2}\left(t_1+t_2+t_3+\frac{1}{t_1t_2t_3}\right)$$

Thay a và b tìm được vào (1):

$$\gamma^2t_1^2+\frac{\gamma^2}{t_1}-2\gamma t_1.\frac{\gamma}{2}\left(t_1+t_2+t_3+\frac{1}{t_1t_2t_3}\right)-\frac{2\gamma}{t_1}.\frac{\gamma}{2}\left(t_1t_2t_3+\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)+c=0$$

$$\Leftrightarrow -c=\gamma^2t_1^2+\frac{\gamma^2}{t_1^2}-\gamma^2t_1^2-\gamma^2t_1t_2-\gamma^2t_1t_3-\frac{\gamma^2}{t_2t_3}-\gamma^2t_2t_3-\frac{\gamma^2}{t_1^2}-\frac{\gamma^2}{t_1t_2}-\frac{\gamma^2}{t_1t_3}$$

$$\Leftrightarrow c=\gamma^2\left(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3+\frac{1}{t_1t_2}+\frac{1}{t_1t_3}+\frac{1}{t_2t_3}\right).$$

Thế tọa độ $M_4\left(\gamma t_1;\frac{\gamma}{t_4}\right)$ vào vế trái của (C) được biểu thức M:

$$M=\gamma^2t_4^2+\frac{\gamma^2}{t_4^2}-2\gamma t_4.\frac{\gamma}{2}\left(t_1+t_2+t_3+\frac{1}{t_1t_2t_3}\right)-\frac{2\gamma}{t_4}.\frac{\gamma}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+t_1t_2t_3\right)$$

$$+\gamma^2\left(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3+\frac{1}{t_1t_2}+\frac{1}{t_1t_3}+\frac{1}{t_2t_3}\right)$$

$$=\gamma^2\left[t_4^2+\frac{1}{t_4^2}-t_1t_4-t_2t_4-t_3t_4-\frac{t_4}{t_1t_2t_3}-\frac{1}{t_1t_4}-\frac{1}{t_2t_4}-\frac{1}{t_3t_4}-\frac{t_1t_2t_3}{t_4}\right.$$

$$\left.+t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3+\frac{1}{t_1t_2}+\frac{1}{t_1t_3}+\frac{1}{t_2t_3}\right]$$

- $t_1.t_2.t_4 = 1$

$$\Rightarrow M=\frac{\gamma^2}{t_1t_2t_3t_4{}^2}\Big(t_1t_2t_3t_4{}^4+t_1t_2t_3-t_1{}^2t_2t_3t_4{}^3-t_1t_2{}^2t_3t_4{}^3-t_1t_2t_3{}^2t_4{}^3-t_4{}^3-t_2t_3t_4$$

$$-t_1t_3t_4-t_1t_2t_4-t_1{}^2t_2{}^2t_3{}^2t_4+t_1{}^2t_2{}^2t_3t_4{}^2+t_1{}^2t_2t_3{}^2t_4{}^2+t_1t_2{}^2t_3{}^2t_4{}^2+t_3t_4{}^2+t_2t_4{}^2+t_1t_4{}^2\Big)$$

$$=\frac{\gamma^2}{t_1t_2t_3t_4{}^2}\Bigg(t_1t_2t_3t_4t_4{}^3+\frac{t_1t_2t_3t_4}{t_4}-t_1t_2t_3t_4t_1t_4{}^2-t_1t_2t_3t_4t_2t_4{}^2-t_1t_2t_3t_4t_3t_4{}^2-t_4{}^3$$

$$-\frac{t_1t_2t_3t_4}{t_1}-\frac{t_1t_2t_3t_4}{t_2}-\frac{t_1t_2t_3t_4}{t_3}-t_1t_2t_3t_4t_1t_2t_3+t_1t_2t_3t_4t_1t_2t_4$$

$$+t_1t_2t_3t_4t_1t_3t_4+t_1t_2t_3t_4t_2t_3t_4+t_3t_4{}^2+t_2t_4{}^2+t_1t_4{}^2\Big)$$

$$=-\frac{\gamma^2}{t_1t_2t_3t_4{}^2}\Bigg(t_4{}^3+\frac{1}{t_4}-t_1t_4{}^2-t_2t_4{}^2-t_3.t_4{}^2-t_4{}^3-\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_3}$$

$$-t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4+t_1t_4{}^2+t_2t_4{}^2+t_3t_4{}^2\Big)$$

$$=\frac{\gamma^2}{t_1t_2t_3t_4{}^2}\left(\frac{1}{t_4}-\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_3}-\frac{1}{t_4}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_1}\right)=0$$

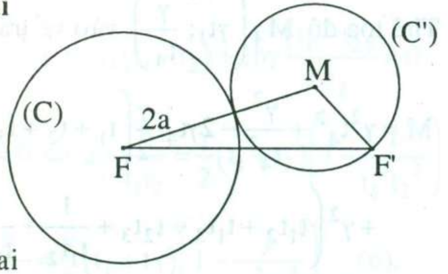
$\Leftrightarrow M_4 \in (C) \Leftrightarrow M_1, M_2, M_3, M_4$ cùng nằm trên đường tròn (C)

b. Từ các kết quả tính toán ở câu a) thì tâm I của (C): I(a; b)

$$\Leftrightarrow I\left(\frac{\gamma}{2}\left(t_1+t_2+t_3+\frac{1}{t_1t_2t_3}\right);\ \frac{\gamma}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+t_1t_2t_3\right)\right)$$

Bài 272. Cho đường tròn (C) tâm F, bán kính 2a và điểm F’ nằm ngoài đường tròn (C). Tìm tập hợp tâm các đường tròn qua F’ và tiếp xúc với đường tròn (C).

Giải



Gọi M là tâm của (C’).

(C’) tiếp xúc ngoài với (C) và qua F’

$\Leftrightarrow$ MF = 2a + MF’

$\Leftrightarrow$ MF – MF’ = 2a

$\Leftrightarrow$ Tập hợp tâm M là hyperbol có hai tiêu điểm F, F' trục thực bằng 2a.

Bài 273. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm A(–a; 0), B(a; 0).

a. Tìm tập hợp điểm M sao cho OM^2 = MA.MB.

b. (C) là đường tròn di động qua A, B. NN’ là một đường kính của (C) cùng phương Ox. Tìm tập hợp các điểm N và N’.

c. Tìm tập hợp các điểm P sao cho các đường thẳng AP, BP có tích hệ số góc bằng k^2 (k là hằng số dương).

d. Tìm tập hợp các điểm Q sao cho tam giác ABQ có $\left|\widehat{QAB}-\widehat{QBA}=\frac{\pi}{2}\right|$.

Giải

a. Gọi M(x; y). $OM^2 = x^2 + y^2$; $MA = \sqrt{(-a-x)^2+y^2}$; $MB = \sqrt{(a-x)^2+y^2}$

$$OM^2 = MA.MB \Leftrightarrow OM^4 = MA^2.MB^2$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4+2x^2y^2 = \left(x^2+2ax+a^2+y^2\right)\left(x^2-2ax+a^2+y^2\right)$$

$$= \left[\left(x^2+y^2+a^2\right)^2-4a^2x^2\right]$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4+2x^2y^2 = x^4+y^4+a^4+2x^2y^2+2a^2x^2+2a^2y^2-4a^2x^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2x^2-2a^2y^2 = a^4 \Leftrightarrow x^2-y^2=\frac{a^2}{2}.$$

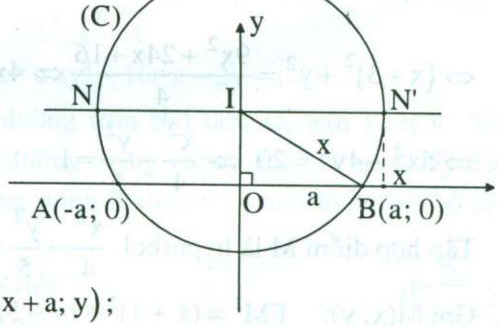
b. (C) có tâm $I\left(0;\sqrt{x^2-a^2}\right)$

$\Rightarrow N'\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)$

Gọi N'(x; y) thì $y = \sqrt{x^2-a^2}$

$\Leftrightarrow y^2 = x^2-a^2 \Leftrightarrow x^2-y^2=a^2$

Tương tự đối với N.



c. Gọi P(x; y) $(y \neq 0)$; $\overrightarrow{AP}=(x+a; y)$;

$\overrightarrow{BP}=(x-a; y)$

AP có hệ số góc $k_1=\frac{y}{x+a}$; BP có hệ số góc $k_2=\frac{y}{x-a}$

$$k_1.k_2=k^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x+a}.\frac{y}{x-a}=k^2 \Leftrightarrow y^2=k^2x^2-k^2a^2 \Leftrightarrow k^2x^2-y^2=k^2a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{k^2a^2}=1.$$

d. Gọi Q(x; y): $\overrightarrow{QA}=(x+a; y)$, $\overrightarrow{QB}=(x-a; y)$ $(y\neq 0)$

$\Rightarrow$ QA có hệ số góc $k_1=\frac{y}{x+a}$; QB có hệ số góc $k_2=\frac{y}{x-a}$.

Giả sử $\widehat{QAB}>\widehat{QBA}$ thì $\widehat{QAB}=90^0+\widehat{QBA}$

$$\Rightarrow \tan\left(\widehat{QAB}\right)=\cot\left(90^0+\widehat{QBA}\right)=\frac{1}{\tan\left(90^0+\widehat{QBA}\right)}$$

$$\Rightarrow k_1.k_2=1 \Leftrightarrow \frac{y}{x+a}.\frac{y}{x-a}=1.\ (x\neq\pm a)\Rightarrow\frac{y^2}{x^2-a^2}=1\Leftrightarrow y^2=x^2-a^2\Leftrightarrow x^2-y^2=a^2.$$

Bài 274.

a. Cho điểm F(–3; 0) và đường thẳng Δ: 3x + 4 = 0. Tìm tập hợp những điểm M sao cho 2FM = 3d(M; Δ) (d(M, d): khoảng cách từ M đến Δ).

b. Cho điểm F(–1; 5) và đường thẳng Δ: 4y – 13 = 0. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\mathrm{FM}=\frac{4}{3}d\left(M;\Delta\right)$.

Giải

a. Gọi M(x; y): $\mathrm{FM}=\sqrt{\left(x+3\right)^2+y^2}$; $d\left(M;\Delta\right)=\frac{\left|3x+4\right|}{3}$

Theo yêu cầu bài toán: 2FM = 3d(M; Δ) $\Leftrightarrow \mathrm{FM}=\frac{3}{2}.\frac{\left|3x+4\right|}{3}\Leftrightarrow \mathrm{FM}^2=\frac{\left(3x+4\right)^2}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(x+3\right)^2+y^2=\frac{9x^2+24x+16}{4}\Leftrightarrow 4x^2+24x+36+4y^2=9x^2+24x+16$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-4y^2=20 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$$

Tập hợp điểm M là hyperbol $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

b. Gọi M(x; y): $\mathrm{FM}^2=(x+1)^2+(y-5)^2$

$d(M;\Delta)=\frac{\left|4y-13\right|}{4}$.

$$\mathrm{FM}=\frac{4}{3}d\left(M,\Delta\right)\Leftrightarrow \mathrm{FM}=\frac{\left|4y-13\right|}{3}\Leftrightarrow \mathrm{FM}^2=\frac{\left(4y-13\right)^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x+1\right)^2+9\left(y-5\right)^2=\left(4y-13\right)^2\Leftrightarrow 9\left(x+1\right)^2+9y^2-90y+225=16y^2-104y+169$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x+1\right)^2-7y^2+14y-7=-63\quad\Leftrightarrow\frac{\left(x+1\right)^2}{7}-\frac{\left(y-1\right)^2}{9}=-1.$$

Bài 275. Tìm tập hợp tâm các đường tròn:

a. $x^2+y^2-2x\tan t-\frac{6}{\cos t}y+\sin t-1=0\quad\left(t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$.

b. $tx^2+ty^2-16t^2x-2y-t=0$.

Giải

a. Đường tròn $x^2+y^2-2x\tan t-\dfrac{6}{\cos t}y+\sin t-1=0$ có tâm I (x; y):

$$\begin{cases} x=\tan t\\ y=\dfrac{3}{\cos t}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\tan t\\ \dfrac{y}{3}=\dfrac{1}{\cos t}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\tan^2 t\\ \dfrac{y^2}{9}=\dfrac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x^2-\dfrac{y^2}{9}=-1$ là phương trình của tập hợp tâm I của đường tròn:

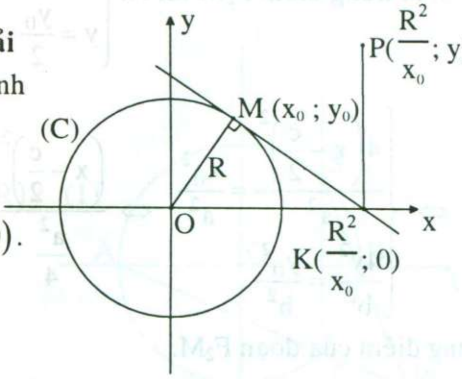
$$x^2+y^2-2x\tan t-\frac{6}{\cos t}y+\sin t-1=0$$

b. $tx^2+ty^2-16t^2x-2y-t=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-16tx-\dfrac{2}{t}y-1=0$.

Gọi I(x; y) là tâm của đường tròn thì : $I\begin{cases}x=8t\\ y=\dfrac{1}{t}\end{cases}$ $(t\neq 0) \Rightarrow x.y=8$ là phương trình của tập hợp tâm I của đường tròn $tx^2+ty^2-16t^2x-2y-t=0$.

Bài 276. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) tâm O, bán kính R. Tiếp tuyến với (C) tại M cắt Ox tại K. trên đường thẳng vuông góc Ox tại K lấy đoạn KP = l.KM (l là hằng số dương). Chứng minh P chạy trên một hyperbol cố định khi M chạy trên (C).

Giải



$M(x_0; y_0) \in x_0^2+y_0^2=R^2$. Phương trình tiếp tuyến (T) của (C) tại M:

$x_0x+y_0y=R^2$

(T) cắt Ox tại K $\Rightarrow K\left(\dfrac{R^2}{x_0};0\right)$ $(x_0\neq 0)$.

$$KM=\sqrt{\left(x_0-\frac{R^2}{x_0}\right)^2+y_0^2}$$

Nếu $P\left(\dfrac{R^2}{x_0};y\right)$ thì $FP=l.KM \Leftrightarrow y=l\sqrt{\left(x_0-\dfrac{R^2}{x_0}\right)^2+y_0^2}$

$$P\begin{cases} x = \dfrac{R^2}{x_0} \\ y = l\sqrt{\left(x_0 - \dfrac{R^2}{x_0}\right)^2 + y_0^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{R^4}{x_0^2} \\ \dfrac{y^2}{l^2} = x_0^2 - 2R^2 + \dfrac{R^4}{x_0^2} + y_0^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{R^4}{x_0^2} \\ \dfrac{y^2}{l^2} = \dfrac{R^4}{x_0^2} - R^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{y^2}{l^2} = R^2$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{R^2} - \dfrac{y^2}{R^2 l^2} = 1$ là phương trình tập hợp điểm P $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 277. Điểm M di động trên hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Tìm tập hợp trung điểm của đoạn F_2M (F_2 là tiêu điểm có hoành độ dương của (H).

Giải

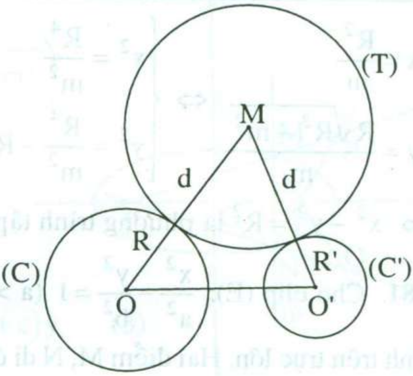
Gọi $M(x_0; y_0) \in (H) \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$; $F_2(c; 0)$

N là trung điểm F_2M thì N: $\begin{cases} x = \dfrac{x_0 + c}{2} \\ y = \dfrac{y_0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - c = x_0 \\ 2y = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\left(x - \dfrac{c}{2}\right)}{a} = \dfrac{x_0}{a} \\ \dfrac{2y}{b} = \dfrac{y_0}{b} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4\left(x - \dfrac{c}{2}\right)^2}{a^2} = \dfrac{x_0^2}{a^2} \\ \dfrac{4y^2}{b^2} = \dfrac{y_0^2}{b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{\left(x - \dfrac{c}{2}\right)^2}{\dfrac{a^2}{4}} - \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2}{4}} = 1$ là phương trình tập hợp các trung điểm của đoạn F_2M.

Bài 278. Cho đường tròn (C) tâm I bán kính R và đường tròn (C') tâm I' bán kính R' và R > R'; OO' > R + R'. Tìm tập hợp tâm M của các đường tròn tiếp xúc ngoài với cả hai đường tròn (C) và (C').

Giải



(T) tiếp xúc ngoài (C):

$\Leftrightarrow$ MO = d + R

MO' = d + R'

$\Leftrightarrow$ MO – MO' = R – R' không đổi.

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là hyperbol (H) có O, O' là hai tiêu điểm và có độ dài trục thực bằng R – R'.

Bài 279. Hyperbol (H) thay đổi có tâm O cố định, trục thực 2a không đổi và (H) luôn qua điểm A cố định. Tìm tập hợp các tiêu điểm F_1, F_2 của (H).

Giải

(H) là tập hợp các điểm M sao cho $|F_1M - F_2M| = 2a$.

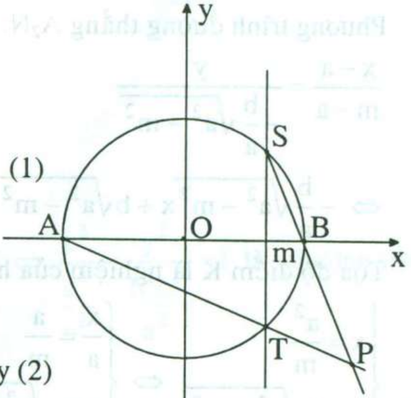
(H) luôn qua điểm A cố định $\Leftrightarrow$ $|F_1A - F_2A| = 2a$ (*)

(*) chứng tỏ tập hợp F_1, F_2 là một hyperbol có một tiêu điểm là điểm cố định A và trục thực bằng 2a.

Bài 280. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = R^2$ $(R > 0)$, (C) cắt trục hoành tại hai điểm A(–R; 0), B(R; 0). Đường thẳng x = m $(-R < m < R,\ m \neq 0)$ cắt (C) tại hai điểm S, T. Đường thẳng AT cắt đường thẳng BS tại P. Tìm tập hợp các điểm P.

Giải

$$S\left(m; \sqrt{R^2 - m^2}\right),\ T\left(m; -\sqrt{R^2 - m^2}\right), A(-R; 0), B(R; 0)$$



Phương trình đường thẳng AT:

$$\frac{x + R}{m + R} = \frac{y}{\sqrt{R^2 - m^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - m^2}.x + R\sqrt{R^2 - m^2} = \left(m + R\right)y \quad (1)$$

Phương trình đường thẳng BS:

$$\frac{x - R}{m - R} = \frac{y}{-\sqrt{R^2 - m^2}}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{R^2 - m^2}.x + R\sqrt{R^2 - m^2} = \left(m - R\right)y \ (2)$$

Tọa độ điểm P là nghiệm của hệ phương trình (1) và (2):

$$\begin{cases} x = \dfrac{R^2}{m} \\ y = \dfrac{R\sqrt{R^2 - m^2}}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{R^4}{m^2} \\ y^2 = \dfrac{R^4}{m^2} - R^2 \end{cases}$$

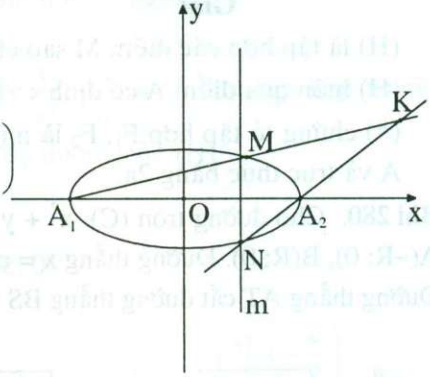
$\Leftrightarrow$ $x^2 - y^2 = R^2$ là phương trình tập hợp điểm P.

Bài 281. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 và A_1, A_2 là hai đỉnh trên trục lớn. Hai điểm M, N di động trên (E') sao cho $MN \perp A_1A_2$.

a. Gọi K là giao điểm của A_1M và A_2N. Tìm tập hợp các điểm K.

b. Hai đường thẳng F_1M và F_2N cắt nhau tại P; hai đường thẳng F_2M và F_1N cắt nhau tại Q. Tìm tập hợp các điểm P và Q.

Giải



a. $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$

$M\left(m; \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - m^2}\right)$, $N\left(m; -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - m^2}\right)$

Phương trình đường thẳng A_1M:

$$\frac{x + a}{m + a} = \frac{y}{\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - m^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - m^2}\,x + b\sqrt{a^2 - m^2} = (m + a)y \quad (1)$$

Phương trình đường thẳng A_2N:

$$\frac{x - a}{m - a} = \frac{y}{-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - m^2}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - m^2}\,x + b\sqrt{a^2 - m^2} = (m - a)y \quad (2)$$

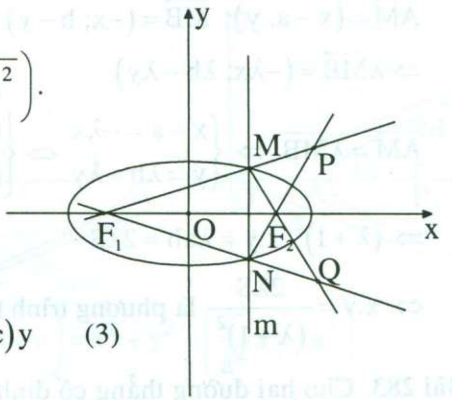
Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình (1) và (2):

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2}{m} \\ y = \dfrac{b\sqrt{a^2 - m^2}}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{m} \\ \dfrac{y}{b} = \dfrac{\sqrt{a^2 - m^2}}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{a^2}{m^2} \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{a^2}{m^2} - 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ là phương trình tập hợp các điểm K.

b. $F_1(-c;\,0)$, $F_2(c;\,0)$

$$M\left(m;\,\frac{b}{a}\sqrt{a^2-m^2}\right),\ N\left(m;\,-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-m^2}\right).$$



Phương trình đường thẳng F_1M:

$$\frac{x+c}{m+c}=\frac{y}{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-m^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a}\sqrt{a^2-m^2}\,x+\frac{bc}{a}\sqrt{a^2-m^2}=(m+c)y \qquad (3)$$

Phương trình đường thẳng F_2N:

$$\frac{x-c}{m-c}=\frac{y}{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-m^2}} \Leftrightarrow -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-m^2}\,x+\frac{bc}{a}\sqrt{a^2-m^2}=(m-c)y \qquad (4)$$

Tọa độ P là nghiệm của hệ (3) và (4): $\begin{cases} x=\dfrac{c^2}{m} \\ y=\dfrac{bc}{am}\sqrt{a^2-m^2} \end{cases}$ (5)

Hoàn toàn tương tự và do P, Q đối xứng nhau qua trục Ox nên tọa độ Q:

$$\begin{cases} x=\dfrac{c^2}{m} \\ y=-\dfrac{bc}{am}\sqrt{a^2-m^2} \end{cases} \qquad (6).$$

Biến đổi, khử m chung cho cả (5) và (6):

$$\frac{x^2}{a^2.c^4}=\frac{1}{a^2m^2}$$

$$\frac{y^2}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{a^2m^2}-\frac{1}{a^4}$$

$$\frac{x^2}{a^2.c^4}-\frac{y^2}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{a^4} \Leftrightarrow \frac{a^2x^2}{c^4}-\frac{a^2y^2}{b^2c^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{c^4}{a^2}}-\frac{y^2}{\frac{b^2c^2}{a^2}}=1$$ là phương trình tập hợp các điểm P và Q.

Bài 282. Một đường thẳng d lưu động cắt các trục tọa độ x'Ox, y'Oy tại A và B sao cho tam giác OAB có diện tích S không đổi. Điểm $M \in d$ sao cho $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$ (λ và hằng số khác 0 và khác –1). Tìm tập hợp các điểm M.

Giải

Theo giả thiết thì a.b = 2S không đổi. Gọi M (x; y).

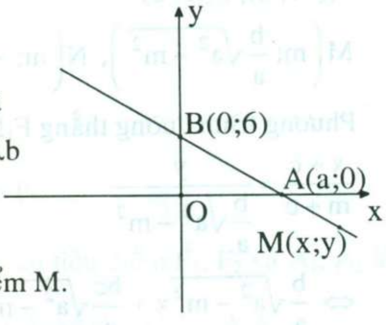
$\overrightarrow{AM} = (x - a;\ y);\ \ \overrightarrow{MB} = (-x;\ b - y)$

$\Rightarrow \lambda\overrightarrow{MB} = (-\lambda x;\ \lambda b - \lambda y)$

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - a = -\lambda x \\ y = \lambda b - \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda+1)x = a \\ (\lambda+1)y = \lambda b \end{cases}$$

$\Rightarrow (\lambda+1)^2.x.y = \lambda ab = 2\lambda S$

$\Leftrightarrow x.y = \dfrac{2\lambda S}{(\lambda+1)^2}$ là phương trình tập hợp điểm M.



Bài 283. Cho hai đường thẳng cố định d và Δ cắt nhau. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a. Tích các khoảng cách từ M đến d và Δ bằng hằng số h^2 ($h > 0$)

b. Hiệu bình phương các khoảng cách từ M đến d và Δ bằng hằng số l ($l \neq 0$).

Giải

a. Chọn một hệ trục tọa độ thích hợp sao cho d có phương trình y = kx, Δ có phương trình y = –kx. Vì d và Δ đều cố định nên k là hằng số mà ta có thể định được khi chọn xong hệ trục tọa độ.

Trong hệ tọa độ đã chọn: M(x; y)

d: $kx - y = 0$: $d(M, d) = \dfrac{|kx - y|}{\sqrt{k^2+1}}$; Δ: $kx + y = 0$: $d(M, \Delta) = \dfrac{|kx + y|}{\sqrt{k^2+1}}$

$d(M, d)\ .\ d(M, \Delta) = h^2 \Leftrightarrow k^2x^2 - y^2 = \pm h^2(k^2 + 1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\dfrac{h^2(k^2+1)}{k^2}} - \dfrac{y^2}{h^2(k^2+1)} = \pm 1$ là phương trình tập hợp điểm M.

b. $[d(M, d)]^2 - [d(M, \Delta)]^2 = l \Leftrightarrow (kx - y)^2 - (kx + y)^2 = l(k^2+1)$

$\Leftrightarrow (kx - y + kx + y)(kx - y - kx - y) = l(k^2+1) \Leftrightarrow -4k.x.y = l(k^2+1)$

$\Leftrightarrow x.y = -\dfrac{l(k^2+1)}{4k}$ là phương trình tập hợp điểm M.

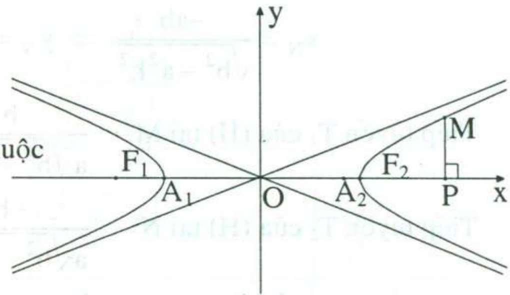
Bài 284. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2. Điểm M thuộc (H) có hình chiếu vuông góc xuống Ox là P. Chứng minh:

a. $OM^2 - F_1M.F_2M = a^2 - b^2$.

b. $(F_1M + F_2M)^2 = 4(OM^2 + b^2)$.

c. $PM^2 = \frac{b^2}{a^2}.\overline{PA_1}.\overline{PA_2}$.

Giải



a. Giả sử $M(x; y) \in (H)$ và M thuộc nhánh bên phải:

$$F_1M = \frac{c}{a}x + a\ ;\ F_2M = \frac{c}{a}x - a$$

$$OM^2 - F_1M.F_2M = x^2 + y^2 - \left(\frac{c}{a}x + a\right)\left(\frac{c}{a}x - a\right) = x^2 + y^2 - \left(\frac{c^2}{a^2}x^2 - a^2\right)$$

$$= x^2 + y^2 + a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 + a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$= \frac{(a+b)^2x^2}{a^2} - b^2 + a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} = \frac{c^2x^2}{a^2} + a^2 - b^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} = a^2 - b^2$$

b. $$\left(F_1M + F_2M\right)^2 = \left(\frac{c}{a}x + a + \frac{c}{a}x - a\right)^2 = \frac{4c^2}{a^2}x^2 = \frac{4\left(a^2 + b^2\right)x^2}{a^2}$$

$$= 4\left(x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}\right) = 4\left(x^2 + y^2 + b^2\right) = 4\left(OM^2 + b^2\right).$$

c. $P(x; 0) \Rightarrow \overline{PA_1} = -a - x\ ;\ \overline{PA_2} = a - x$

$$\overline{PA_1}.\overline{PA_2} = -\left(a^2 - x^2\right) = x^2 - a^2$$

$$PM^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right) = \frac{b^2}{a^2}(-a - x)(a - x) = \frac{b^2}{a^2}.\overline{PA_1}.\overline{PA_2}.$$

Bài 285. Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

a. Một đường thẳng qua tâm (H), cắt (H) tại M, N. Chứng minh các tiếp tuyến của (H) tại M và N song song nhau;

b. Chứng minh nếu hai tiếp tuyến của (H) song song với nhau thì các tiếp điểm đối xứng qua tâm của (H).

Giải

a. Đường thẳng qua tâm của (H) có dạng y = kx với $|k| < \frac{b}{a}$, y = kx cắt (H) tại

M, N: $x_M = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} \Rightarrow y_M = \frac{kab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}$

$$x_N = \frac{-ab}{\sqrt{b^2-a^2k^2}} \Rightarrow y_N = \frac{-kab}{\sqrt{b^2-a^2k^2}}$$

Tiếp tuyến T_1 của (H) tại M: $\frac{b}{a\sqrt{b^2-a^2k^2}}x - \frac{ka}{b\sqrt{b^2-a^2k^2}}y - 1 = 0$

Tiếp tuyến T_2 của (H) tại N: $\frac{-b}{a\sqrt{b^2-a^2k^2}}x + \frac{ka}{b\sqrt{b^2-a^2k^2}}y - 1 = 0$

Dễ thấy : $\dfrac{\dfrac{b}{a\sqrt{b^2-a^2k^2}}}{\dfrac{-b}{a\sqrt{b^2-a^2k^2}}} = \dfrac{\dfrac{-ka}{b\sqrt{b^2-a^2k^2}}}{\dfrac{ka}{b\sqrt{b^2-a^2k^2}}} = -1 \neq \dfrac{-1}{-1} \Leftrightarrow T_1 \,//\, T_2.$

b. $M(x_1; y_1) \in (H)$: Tiếp tuyến tại M: $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} - 1 = 0$

$N(x_2; y_2) \in (H)$: Tiếp tuyến tại N: $\frac{x_2x}{a^2} - \frac{y_2y}{b^2} - 1 = 0$

Với $x_1 \neq x_2$: hai tiếp tuyến song song với nhau $\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \neq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2-a^2}}{\frac{b}{a}\sqrt{x_2^2-a^2}} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{\sqrt{x_1^2-a^2}}{\sqrt{x_2^2-a^2}} \Leftrightarrow x_1.\sqrt{x_2^2-a^2} = x_2.\sqrt{x_1^2-a^2}$$

$$\Leftrightarrow x_1^2x_2^2 - a^2x_1^2 = x_1^2x_2^2 - a^2x_2^2 \Leftrightarrow a^2\left(x_2^2 - x_1^2\right) = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1 \ (\text{do } x_2 \neq x_1)$$

$\Rightarrow M(x_1; y_1)$ thì $N(-x_1; -y_1) \Leftrightarrow$ M và N đối xứng nhau qua O.

Bài 286. Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2.

a. Chứng minh tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm đến một tiếp tuyến tùy ý của (H) bằng b^2.

b. Đường thẳng Δ di động không qua tâm của (H) sao cho F_1, F_2 ở hai bên đối với Δ và tích các khoảng cách từ F_1, F_2 đến Δ bằng b^2. Chứng minh Δ tiếp xúc (H).

Giải

a. Gọi $M(x_0; y_0) \in (H) \Leftrightarrow y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x_0^2 - a^2\right)$.

Tiếp tuyến T của (H) tại M: $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0$; $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$

$$d\left(F_1, T\right) = \frac{\left|\frac{-cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}\ ; \quad d\left(F_2, T\right) = \frac{\left|\frac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}$$

$$d(F_1, T)\ .\ d(F_2, T) = \frac{\left|\frac{c^2x_0^2}{a^4} - 1\right|}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} = \frac{\left|\frac{c^2x_0^2}{a^4} - 1\right|}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{1}{b^4}.\frac{b^2}{a^2}\left(x_0^2 - a^2\right)} = \frac{\left|\frac{c^2x_0^2}{a^4} - 1\right|}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{x_0^2}{a^2b^2} - \frac{1}{b^2}}$$

$$= \frac{\left|\frac{c^2x_0^2}{a^4} - 1\right|}{\frac{x_0^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \frac{1}{b^2}} = \frac{\left|\frac{c^2x_0^2}{a^4} - 1\right|}{\frac{x_0^2\left(a^2 + b^2\right)}{a^4.b^2} - \frac{1}{b^2}} = \frac{\left|\frac{c^2x_0^2}{a^4} - 1\right|}{\frac{1}{b^2}\left(\frac{c^2x_0^2}{a^4} - 1\right)} = b^2.$$

b. Phương trình đường thẳng Δ di động có dạng: $Ax - y + B = 0$

$$d\left(F_1; \Delta\right) = \frac{|-Ac + B|}{\sqrt{A^2 + 1}},\ d\left(F_2; \Delta\right) = \frac{|Ac + B|}{\sqrt{A^2 + 1}} \Rightarrow d\left(F_1; \Delta\right).d\left(F_2; \Delta\right) = \frac{\left|B^2 - A^2c^2\right|}{A^2 + 1}$$

Do F_1, F_2 ở hai bên Δ nên $B^2 - A^2c^2 < 0 \Rightarrow |B^2 - A^2c^2| = A^2c^2 - B^2$.

Theo giả thiết, ta có: $\dfrac{A^2c^2 - B^2}{A^2 + 1} = b^2 \Leftrightarrow A^2c^2 - B^2 = A^2b^2 + b^2$

$\Leftrightarrow A^2\left(c^2 - b^2\right) - b^2 = B^2 \Leftrightarrow A^2a^2 - b^2 = B^2 \Leftrightarrow \Delta$ tiếp xúc (H).

Bài 287. Cho hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và điểm M di động trên (H) ($M \notin Ox$). Mt là tiếp tuyến của (H) tại M; M_n là đường thẳng vuông góc với Mt tại M. Các đường thẳng Mt, M_n cắt Ox lần lượt tại T, N và cắt Oy lần lượt tại T', N'. Chứng minh:

a. $\overline{OT}.\overline{ON}$ và $\overline{OT'}.\overline{ON'}$ không đổi.

b. Đường tròn đường kính T'N' qua hai tiêu điểm của (H).

c. $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{MN'}}$ không đổi.

Giải

a. $M(x_0; y_0) \in (H) \Rightarrow$ Phương trình Mt: $\dfrac{x_0x}{a^2} - \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$.

Phương trình M_n có dạng: $\dfrac{y_0}{b^2}x + \dfrac{x_0}{a^2}y + C = 0$; M_n qua M $\Leftrightarrow C = -\dfrac{x_0y_0.c^2}{a^2b^2}$

⇒ Phương trình M_n: $\frac{y_0}{b^2}x + \frac{x_0}{a^2}y = \frac{x_0y_0c^2}{a^2b^2}$.

$$\Rightarrow T\left(\frac{a^2}{x_0}; 0\right),\ T'\left(0; -\frac{b^2}{y_0}\right),\ N\left(\frac{x_0c^2}{a^2}; 0\right),\ N'\left(0; \frac{y_0c^2}{b^2}\right)$$

$$\overline{OT} = \frac{a^2}{x_0};\ \overline{ON} = \frac{x_0.c^2}{a^2} \Rightarrow \overline{OT}.\overline{ON} = c^2$$

$$\overline{OT'} = \frac{-b^2}{y_0};\ \overline{ON'} = \frac{y_0.c^2}{b^2} \Rightarrow \overline{OT'}.\overline{ON'} = -c^2.$$

b. $T'\left(0; -\frac{b^2}{y_0}\right),\ N'\left(0; \frac{y_0c^2}{b^2}\right)$

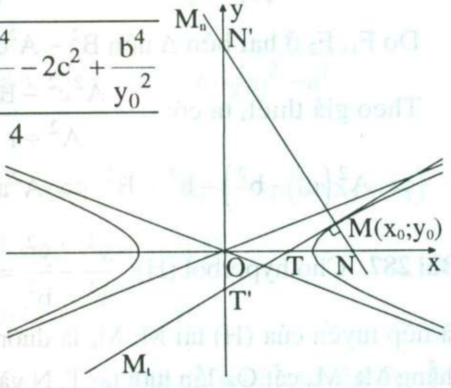
Đường tròn đường kính T'N' có tâm $I\left(0; \frac{\frac{y_0c^2}{b^2} - \frac{b^2}{y_0}}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}\left|\frac{y_0c^2}{b^2} + \frac{b^2}{y_0}\right|$.

$F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$

$$F_1I = \sqrt{c^2 + \frac{\left(\frac{y_0c^2}{b^2} - \frac{b^2}{y_0}\right)^2}{4}} = \sqrt{\frac{4c^2 + \frac{y_0^2c^4}{b^4} - 2c^2 + \frac{b^4}{y_0^2}}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y_0^2c^4}{b^4} + 2c^2 + \frac{b^4}{y_0^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{y_0c^2}{b^2} + \frac{b^2}{y_0}\right)^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{y_0c^2}{b^2} + \frac{b^2}{y_0}\right| = R.$$



Tương tự $F_2I = \frac{1}{2}\left|\frac{y_0c^2}{b^2} + \frac{b^2}{y_0}\right| = R \Rightarrow$ đpcm.

c. Vì M, N, N' đều thuộc đường thẳng M_n nên $\frac{\overline{MN}}{\overline{MN'}} = \frac{MN}{MN'}$.

$$MN = \sqrt{\left(\frac{x_0c^2}{a^2} - x_0\right)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2\left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right)^2 + y_0^2} = \sqrt{\frac{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}{a^4}}$$

$$MN' = \sqrt{(-x_0)^2 + \left(\frac{y_0c^2}{b^2} - y_0\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2\left(\frac{c^2 - b^2}{b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}{b^4}}$$

$\Rightarrow \dfrac{MN}{MN'} = \dfrac{b^2}{a^2} \Rightarrow \dfrac{\overline{MN}}{\overline{MN'}} = -\dfrac{b^2}{a^2}$ (do $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MN'}$ ngược hướng)

$\Rightarrow \dfrac{\overline{MN}}{\overline{MN'}} = -\dfrac{b^2}{a^2}$.

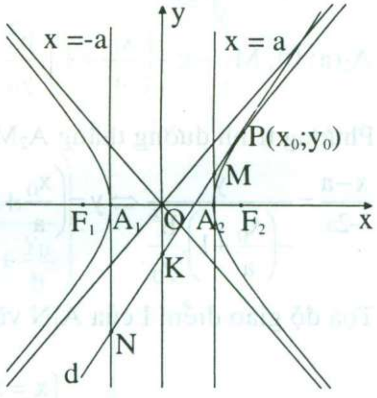
Bài 288. Cho hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với hai đỉnh $A_1(-a;\,0)$, $A_2(a;\,0)$. Một tiếp tuyến d bất kì của (H) cắt các tiếp tuyến A_1m và A_2n tại M, N.

a. Chứng minh $\overline{A_1M}.\overline{A_2N} = -b^2$.

b. Chứng minh đường tròn đường kính MN qua hai tiêu điểm của (H).

c. Tìm tập hợp giao điểm I của hai đường thẳng A_1N và A_2M khi d thay đổi.

Giải



a. Gọi $P(x_0;\,y_0) \in (H) \Leftrightarrow b^2x_0^{\,2} - a^2y_0^{\,2} = a^2b^2$

Phương trình tiếp tuyến d: $\dfrac{x_0x}{a^2} - \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$

$\Rightarrow$ d cắt A_1m tại $M\left(-a;\, -\left(1 + \dfrac{x_0}{a}\right).\dfrac{b^2}{y_0}\right)$

d cắt A_2n tại $N\left(a;\, \left(\dfrac{x_0}{a} - 1\right).\dfrac{b^2}{y_0}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A_1M} = -\left(\dfrac{x_0}{a} + 1\right).\dfrac{b^2}{y_0} \\ \overline{A_2N} = \left(\dfrac{x_0}{a} - 1\right)\dfrac{b^2}{y_0}\end{array}\right\} \overline{A_1M}.\overline{A_2N} = -\left(\dfrac{x_0^{\,2}}{a^2} - 1\right).\dfrac{b^4}{y_0^{\,2}} = -\dfrac{y_0^{\,2}}{b^2}.\dfrac{b^4}{y_0^{\,2}} = -b^2.$$

b. $$\left.\begin{array}{l}\text{Gọi K là trung điểm MN. } K\left(0;\, -\dfrac{b^2}{y_0}\right). \\ MN = \sqrt{(2a)^2 + \left(\dfrac{2b^2x_0}{ay_0}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4\left(a^4y_0^{\,2} + b^4x_0^{\,2}\right)}{a^2y_0^{\,2}}}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

$\Rightarrow$ Bán kính đường tròn đường kính MN:

$$R = \frac{\sqrt{a^4y_0^{\,2} + b^4x_0^{\,2}}}{ay_0} = \frac{\sqrt{a^4y_0^{\,2} + b^2\left(a^2b^2 + b^2y_0^{\,2}\right)}}{ay_0} = \frac{\sqrt{a^2\left(a^2y_0^{\,2} + b^4 + b^2y_0^{\,2}\right)}}{ay_0} = \frac{\sqrt{c^2y_0^{\,2} + b^4}}{y_0}$$

$F_1(-c;\, 0)$ thì $KF_1 = \sqrt{c^2 + \dfrac{b^4}{{y_0}^2}} = \dfrac{\sqrt{c^2{y_0}^2 + b^4}}{y_0}$

$F_2(c;\, 0)$ thì $KF_2 = \sqrt{c^2 + \dfrac{b^4}{{y_0}^2}} = \dfrac{\sqrt{c^2{y_0}^2 + b^4}}{y_0}$

c. $A_1(-a;\, 0)$, $N\left(a; \left(\dfrac{x_0}{a} - 1\right).\dfrac{b^2}{y_0}\right)$

Phương trình đường thẳng A_1N:

$$\frac{x+a}{2a} = \frac{y}{\left(\dfrac{x_0}{a}-1\right).\dfrac{b^2}{y_0}} \Leftrightarrow y = \left(\frac{x_0}{a}-1\right).\frac{b^2}{2ay_0}x + \left(\frac{x_0}{a}-1\right).\frac{b^2}{2y_0} \qquad (1)$$

$A_2(a;\, 0)$, $M\left(-a; -\left(\dfrac{x_0}{a}+1\right).\dfrac{b^2}{y_0}\right)$

Phương trình đường thẳng A_2M:

$$\frac{x-a}{-2a} = \frac{y}{-\left(\dfrac{x_0}{a}+1\right).\dfrac{b^2}{y_0}} \Leftrightarrow y = \left(\frac{x_0}{a}+1\right).\frac{b^2}{2ay_0}x - \left(\frac{x_0}{a}+1\right).\frac{b^2}{2y_0} \qquad (2)$$

Tọa độ giao điểm I của A_1N và A_2M là nghiệm của hệ (1), (2).

Giải hệ (1) và (2) được: $\begin{cases} x = x_0 \\ y = \dfrac{y_0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{{x_0}^2}{a^2} \\ \dfrac{4y^2}{b^2} = \dfrac{{y_0}^2}{b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{4y^2}{b^2} = 1$ là phương trình tập hợp điểm I.

Bài 289. Trong mặt phẳng Oxy cho hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. d là một tiếp tuyến bất kì của (H), tiếp xúc (H) tại T. Gọi M, N là các giao điểm của tiếp tuyến d với các tiệm cận của (H). Chứng minh:

a. T là trung điểm đoạn MN.

b. Tam giác OMN có diện tích không phụ thuộc tiếp tuyến d.

Giải

a. $T(x_0;\, y_0)$: phương trình d: $\dfrac{x_0x}{a^2} - \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$

Tọa độ M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y=\dfrac{b}{a}x \\ \dfrac{x_0}{a^2}x-\dfrac{y_0}{b^2}y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}} \\ y=\dfrac{b}{\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}} \end{cases}$

$$\Rightarrow M\left(\frac{a}{\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}};\frac{b}{\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}}\right).$$

Tọa độ N là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y=-\dfrac{b}{a}x \\ \dfrac{x_0}{a^2}x-\dfrac{y_0}{b^2}y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}} \\ y=\dfrac{-b}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}} \end{cases}$

$$\Rightarrow N\left(\frac{a}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}};\frac{-b}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}}\right).$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_M+x_N}{2}=\dfrac{\dfrac{a}{\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}}+\dfrac{a}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}}}{2}=\dfrac{a.\dfrac{2x_0}{a}}{2}=x_0=x_T \\[3ex] \dfrac{y_M+y_N}{2}=\dfrac{\dfrac{b}{\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}}+\dfrac{-b}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}}}{2}=\dfrac{b.\dfrac{2x_0}{b}}{2}=y_0=y_T \end{array}\right\}\Rightarrow \text{T là trung điểm MN.}$$

b. Gọi α là góc giữa tiệm cận $y=\dfrac{b}{a}x$ thì $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}\Rightarrow \sin 2\alpha=\dfrac{2\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{2ab}{c^2}$.

$OM=\dfrac{c}{\left|\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right|}$; $ON=\dfrac{c}{\left|\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right|}$.

$S_{OMN}=\dfrac{1}{2}OM.ON.\sin 2\alpha=\dfrac{1}{2}c^2.\dfrac{2ab}{c^2}=ab\Rightarrow$ đpcm.

Bài 290. Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Một đường thẳng d bất kì cắt (H) tại M, N và cắt hai tiệm cận tại P, Q. Chứng minh:

a. MP = NQ.

b. Nếu d có phương không đổi thì $\overline{MP}.\overline{MQ}$ là hằng số.

Giải

a. Giả sử d có phương trình y = Ax + B.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (H): $b^2x^2-a^2\left(Ax+B\right)^2-a^2b^2=0$

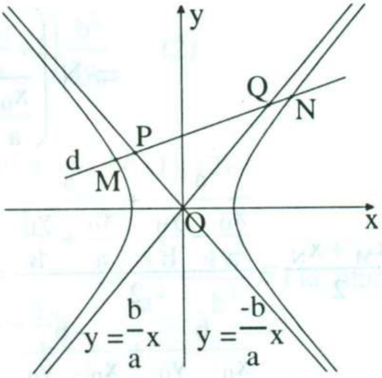
$$\Leftrightarrow b^2x^2-a^2\left(A^2x^2+2ABx+B^2\right)-a^2b^2=0 \Leftrightarrow \left(b^2-a^2A^2\right)x^2-2a^2ABx-a^2\left(B^2+b^2\right)=0$$

M(x_M; y_M), N(x_N; y_N), $\begin{array}{l} y_M=Ax_M+B \\ y_N=Ax_N+B \end{array}$ thì: $\begin{cases} x_M+x_N=\dfrac{2a^2AB}{b^2-a^2A^2} \\ x_M.x_N=\dfrac{-a^2\left(B^2+b^2\right)}{b^2-a^2A^2} \end{cases}$

Tọa độ P là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{b}{a}x \\ y=Ax+B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-Ba}{b+aA} \\ y=\dfrac{Bb}{b+aA} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-Ba}{b+aA};\frac{Ba}{b+aA}\right).$$



Tọa độ Q là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=\dfrac{b}{a}x \\ y=Ax+B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{Ba}{b-aA} \\ y=\dfrac{Bb}{b-aA} \end{cases} \Leftrightarrow Q\left(\frac{Ba}{b-aA};\frac{Ba}{b-aA}\right).$$

Do M, P, Q, N cùng ở trên đường thẳng y = Ax + B; P, Q nằm phía trong đoạn thẳng MN nên MP = NQ ⇔ MN và PQ có cùng trung điểm.

Gọi I là trung điểm MN thì:

$$\left.\begin{array}{l} x_I=\dfrac{x_M+x_N}{2}=\dfrac{a^2AB}{b^2-a^2A^2} \\ y_I=Ax_I+B=A\dfrac{a^2AB}{b^2-a^2A^2}+B=\dfrac{Bb^2}{b^2-a^2A^2} \end{array}\right\} \Rightarrow I\left(\frac{a^2AB}{b^2-a^2A^2};\frac{Bb^2}{b^2-a^2A^2}\right).$$

Gọi I’ là trung điểm PQ thì:

$$x_{I'}=\frac{x_P+x_Q}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{-Ba}{b+aA}+\frac{Ba}{b-aA}\right)=\frac{1}{2}Ba\left(\frac{-b+aA+b+aA}{b^2-a^2A^2}\right)=\frac{a^2AB}{b^2-a^2A^2}=x_I$$

$\Leftrightarrow I'\equiv I \Leftrightarrow$ MN và PQ có cùng trung điểm $\Leftrightarrow$ MP = NQ.

b. $x_M=\dfrac{a^2AB-ab\sqrt{b^2+B^2-a^2A^2}}{b^2-a^2A^2}$; $y_M=A\left(\dfrac{a^2AB-ab\sqrt{b^2+B^2-a^2A^2}}{b^2-a^2A^2}\right)+B$

$x_P=\dfrac{-aB}{b+aA}$; $y_P=\dfrac{Bb}{b+aA}$; $x_Q=\dfrac{aB}{b-aA}$; $y_Q=\dfrac{Bb}{b-aA}$.

Vì M, P, Q cùng nằm trên d nên $\overline{MP}.\overline{MQ}=\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}$

$\overrightarrow{MP}=\left(x_P-x_M;y_P-y_M\right)$, $\overrightarrow{MQ}=\left(x_Q-x_M;y_Q-y_M\right)$.

Tính riêng:

$$x_P-x_M=\frac{-aB}{b+aA}-\frac{a^2AB-ab\sqrt{b^2+B^2-a^2A^2}}{b^2-a^2A^2}$$

$$=\frac{-aB\left(b-aA\right)-a^2AB+ab\sqrt{b^2+B^2-a^2A^2}}{b^2-a^2A^2}$$

$$=\frac{ab\sqrt{b^2+B^2-a^2A^2}-abB}{b^2-a^2A^2}$$

$$x_Q-x_M=\frac{aB}{b-aA}-\frac{a^2AB-ab\sqrt{b^2+B^2-a^2A^2}}{b^2-a^2A^2}$$

$$=\frac{aB\left(b+aA\right)-a^2AB+ab\sqrt{b^2+B^2-a^2A^2}}{b^2-a^2A^2}$$

$$=\frac{ab\sqrt{b^2+B^2-a^2A^2}+abB}{b^2-a^2A^2}$$

$$(x_P-x_M)\left(x_Q-x_M\right)=\frac{a^2b^2\left(b^2+B^2-a^2A^2\right)-a^2b^2B^2}{\left(b^2-a^2A^2\right)^2}=\frac{a^2b^2\left(b^2-a^2A^2\right)}{\left(b^2-a^2A^2\right)^2}=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2A^2}$$

$$y_P-y_M=\frac{bB}{b+aA}-\left[A\left(\frac{a^2AB-ab\sqrt{b^2+B^2-a^2A^2}}{b^2-a^2A^2}\right)+B\right]$$

$$=\frac{bB\left(b-aA\right)-a^2A^2B+abA\sqrt{b^2+B^2-a^2A^2}-b^2B+a^2A^2B}{b^2-a^2A^2}$$

$$=\frac{abA\sqrt{b^2+B^2-a^2A^2}-abAB}{b^2-a^2A^2}$$

$$\left(y_P-y_M\right)\left(y_Q-y_M\right)=\frac{a^2b^2A^2\left(b^2+B^2-a^2A^2\right)-a^2b^2A^2B^2}{\left(b^2-a^2A^2\right)^2}=\frac{a^2b^2A^2\left(b^2-a^2A^2\right)}{\left(b^2-a^2A^2\right)^2}=\frac{a^2b^2A^2}{b^2-a^2A^2}$$

$$\Rightarrow \overline{MP}.\overline{MQ}=\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2A^2}+\frac{a^2b^2A^2}{b^2-a^2A^2}=\frac{a^2b^2\left(1+A^2\right)}{b^2-a^2A^2}.$$

d có phương không đổi $\Rightarrow$ A không đổi $\Rightarrow \overline{MP}.\overline{MQ}=\dfrac{a^2b^2\left(1+A^2\right)}{b^2-a^2A^2}=$ hằng số.

Bài 291. Cho đường thẳng d: $x\cos t-y\sin t+\sqrt{4\cos^2 t-1}=0$ (t là tham số).

a. Chứng minh d luôn tiếp xúc với một hyperbol (H) cố định;

b. Tìm tập hợp những điểm M sao cho từ đó kẻ được hai tiếp tuyến của (H) vuông góc nhau.

Giải

a. d: $x\cos t-y\sin t+\sqrt{4\cos^2 t-1}=0$

Giả sử d tiếp xúc với hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Theo điều kiện tiếp xúc của d và (H) thì:

$$\cos^2 t.a^2-\sin^2 t.b^2=4\cos^2 t-1=4\cos^2 t-\cos^2 t-\sin^2 t=3\cos^2 t-\sin^2 t$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 t\left(a^2-3\right)-\sin^2 t\left(b^2-1\right)=0 \text{ thỏa } \forall t \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=3\\ b^2=1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ d luôn luôn tiếp xúc hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$.

b. Gọi $M(x_0;\, y_0)$ và Δ là đường thẳng $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = kx + y - kx_0$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (H):

$$x^2-3\left(kx+y_0-kx_0\right)^2-3=0\Leftrightarrow x^2-3\left(k^2x^2+y_0{}^2+k^2x_0{}^2+2ky_0x-2k^2x_0x-2kx_0y_0\right)-3=0$$

$$\Leftrightarrow\left(1-3k^2\right)x^2+6k\left(kx_0-y_0\right)x-3\left(k^2x_0{}^2-2kx_0y_0+y_0{}^2+1\right)=0$$

Phương trình này có:

$$\Delta'=9k^2\left(kx_0-y_0\right)^2+3\left(1-3k^2\right)\left(k^2x_0{}^2-2kx_0y_0+y_0{}^2+1\right)$$

$$=3\left[3k^2\left(k^2x_0{}^2-2kx_0y_0+y_0{}^2\right)-\left(1-3k^2\right)\left(k^2x_0{}^2-2kx_0y_0+y_0{}^2+1\right)\right]$$

$$=3\left[\left(x_0{}^2-3\right)k^2-2x_0y_0k+y_0{}^2+1\right]$$

Để Δ tiếp xúc (H) thì Δ' = 0 ⇔ $\left(x_0^{\,2}-3\right)k^2-2x_0y_0k+y_0^{\,2}+1$ (*)

Để từ M kẻ được hai tiếp tuyến của (H) vuông góc với nhau thì (*) có hai nghiệm k_1, k_2 sao cho $k_1 \,.\, k_2 = -1 \Leftrightarrow \dfrac{y_0^{\,2}+1}{x_0^{\,2}-3}=-1 \Leftrightarrow y_0^{\,2}+1=-x_0^{\,2}+3 \Leftrightarrow x_0^{\,2}+y_0^{\,2}=2$

⇒ Tập hợp điểm M là đường tròn $x^2 + y^2 = 2$, bỏ đi các giao điểm của đường tròn này với hai tiệm cận của (H).

Bài 292. Cho hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Tìm tỉ số k của phép co trục Ox để qua phép co đó, (H) biến thành (H_1) là một hyperbol vuông.

Giải

Gọi M(x; y) ∈ (H): $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

M'(x'; y') là ảnh của M qua phép co trục Ox: $\begin{cases} x'=x \\ y'=\left|\dfrac{a}{b}\right|y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=\left|\dfrac{b}{a}\right|y' \end{cases}$.

Ảnh của (H): $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{x'^2}{a^2} \\ \dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{\dfrac{b^2}{a^2}y'^2}{b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x'^2}{a^2}-\dfrac{y'^2}{a^2}=1 \Rightarrow k=\left|\dfrac{a}{b}\right|$: (H_1) là hyperbol vuông.

Bài 293. Trong mặt phẳng Oxy cho hyperbol vuông (H): $x^2 - y^2 = a^2$ có hai tiêu điểm F_1, F_2. M là một điểm tùy ý trên (H).

a. Chứng minh $F_1M \,.\, F_2M = OM^2$.

b. Chứng minh đường tròn tâm M tiếp xúc với trục tung luôn cắt trục hoành theo một đoạn thẳng có độ dài không đổi.

c. Pháp tuyến của (H) tại M cắt Ox, Oy tại P, Q. Chứng minh MP = MQ = MO.

d. Giả sử a = 1, N(x; y), N'(x'; y') là hai điểm trên (H), điểm S(X; Y) định bởi: $\begin{cases} X=xx'+yy' \\ Y=xy'+x'y \end{cases}$. Chứng minh S ∈ (H) và $\overrightarrow{AS}$ cùng phương với $\overrightarrow{NN'}$ (A là đỉnh của (H) có hoành độ dương).

Giải

a. (H) có $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2} \Rightarrow e = \sqrt{2}$.

$M(x_0; y_0) \in (H) \Leftrightarrow x_0^{\,2}-y_0^{\,2}=a^2$

$F_1\left(-a\sqrt{2};0\right)$, $F_2\left(a\sqrt{2};0\right)$, $F_1M=\left|\sqrt{2}x_0-a\right|$, $F_2M=\left|\sqrt{2}x_0+a\right|$

$\Rightarrow F_1M.F_2M=\left|2{x_0}^2-a^2\right|=\left|{x_0}^2+{x_0}^2-a^2\right|={x_0}^2+{y_0}^2=OM^2$.

b. Đường tròn (C), tâm $M(x_0;y_0)$, tiếp xúc trục tung có bán kính $R=|x_0|$

Phương trình (C): $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2={x_0}^2$

(C) cắt Ox: $y=0\Leftrightarrow(x-x_0)^2={x_0}^2-{y_0}^2=a^2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-x_0=a\\x-x_0=-a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a+x_0\\x=-a-x_0\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ (C) cắt Ox tại $A(-a+x_0;0)$, $B(a+x_0;0)\Rightarrow AB=2|a|$.

c. Tiếp tuyến T của (H) tại $M(x_0;y_0)$: $x_0x-y_0y-a^2=0$

$\Rightarrow$ Phương trình pháp tuyến Δ tại M của (H) có dạng: $y_0x+x_0y+C=0$

Δ qua $M(x_0;y_0)\Leftrightarrow C=-2x_0y_0$

Δ: $y_0x+x_0y=2x_0y_0$. Δ cắt Ox tại $P(2x_0;0)$, cắt Oy tại $Q(0;2y_0)$.

$$\left.\begin{array}{l}MP=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\\MQ=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\\MO=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\end{array}\right\}\Rightarrow MP=MQ=MO.$$

d. $\left.\begin{array}{l}N(x;y)\in(H)\Leftrightarrow x^2-y^2=a^2=1\\N'(x';y')\in(H)\Leftrightarrow x'^2-y'^2=a^2=1\end{array}\right\}$ do $a=1$

$$S\left\{\begin{array}{l}X=xx'+yy'\\Y=xy'+x'y\end{array}\right.$$

$$X^2=x^2x'^2+y^2y'^2+2xx'yy'$$

$$Y^2=x^2y'^2+x'^2y^2+2xx'yy'$$

$$X^2-Y^2=x^2\left(x'^2-y'^2\right)-y^2\left(x'^2-y'^2\right)=x^2-y^2=1\Leftrightarrow S\in(H).$$

$$\left.\begin{array}{l}A(1;0)\\S(xx'+yy';xy'+x'y)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{AS}=(xx'+yy'-1;xy'+x'y)$$

$$\overrightarrow{NN'}=(x'-x\quad;\ y'-y)$$

$\overrightarrow{AS}$ cùng phương $\overrightarrow{NN'}\Leftrightarrow(xx'+yy'-1)(y'-y)=(xy'+x'y)(x'-x)$ (*)

$\Leftrightarrow xx'y'+yy'^2-y'-xyx'-y^2y'+y=xx'y'+yx'^2-x^2y'-xyx'$

$\Leftrightarrow\left(x^2y'-y^2y'\right)-\left(yx'^2-yy'^2\right)-y'+y=0\Leftrightarrow y'\left(x^2-y^2\right)-y\left(x'^2-y'^2\right)-y'+y=0$

$\Leftrightarrow y'-y-y'+y=0\Leftrightarrow$ (*) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 294. Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B.

a. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\left|\widehat{MAB} - \widehat{MBA}\right| = \frac{\pi}{2}$;

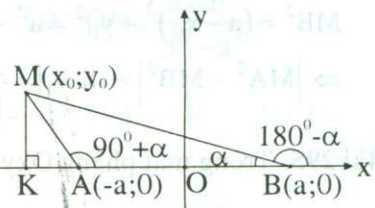
b. Gọi K là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng AB. Chứng tỏ rằng đường thẳng MK tiếp xúc với đường tròn (MAB);

c. Gọi O là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng: $\left|MA^2 - MB^2\right| = 2AB.OK$.

Giải

Đặt A, B vào một hệ trục Oxy sao cho A(−a; 0), B(a; 0). Gọi M(x_0; y_0)

a. $\overrightarrow{AM} = (x_0 + a; y_0)$, $\widehat{MAB} = 90^0 + \alpha$, $\widehat{MBA} = \alpha$



$\Rightarrow$ AM có hệ số góc $k_1 = \dfrac{y_0}{x_0 + a} = \tan\left(90^0 + \alpha\right)$

$\overrightarrow{BM} = \left(x_0 - a; y_0\right)$

$\Rightarrow$ BM có hệ số góc $k_2 = \dfrac{y_0}{x_0 - a} = \tan\left(180^0 - \alpha\right) = -\tan\alpha$.

Từ $\tan(90^0 + \alpha) = -\cot\alpha = -\dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{1}{\tan\left(180^0 - \alpha\right)}$

$$\Rightarrow k_1 . k_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{y_0}{x_0 - a} . \frac{y_0}{x_0 + a} = 1 \Leftrightarrow \frac{{y_0}^2}{{x_0}^2 - a^2} = 1 \Leftrightarrow {y_0}^2 = {x_0}^2 - a^2$$

$\Leftrightarrow {x_0}^2 - {y_0}^2 = a^2$: tập hợp điểm M là một hyperbol vuông.

b. Đường trung trực của đoạn AB có phương trình x = 0.

Gọi D là trung điểm AM: $D\left(\dfrac{x_0 - a}{2}; \dfrac{y_0}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AM}$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng AM: phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AM có dạng: $(x_0 + a)x + y_0 y + C = 0$ qua D

$$\Leftrightarrow \left(x_0 + a\right).\frac{x_0 - a}{2} + y_0.\frac{y_0}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{a^2 - {x_0}^2 - {y_0}^2}{2}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường trung trực của AM: $\left(x_0 + a\right)x + y_0 y + \dfrac{a^2 - {x_0}^2 - {y_0}^2}{2} = 0$

Gọi I(x; y) là tâm đường tròn (MAB). Tọa độ I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 0 \\ (x_0 + a)x + y_0 y = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 - a^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 - a^2}{2y_0} = \dfrac{2y_0^2}{2y_0} = y_0 \end{cases}$$

$I(0; y_0)$, bán kính $IA = IB = \sqrt{a^2 + y_0^2}$

Đường thẳng MK có phương trình $x - x_0 = 0$.

$d(I, MK) = |-x_0| = |x_0| = \sqrt{a^2 + y_0^2} \Rightarrow$ đpcm.

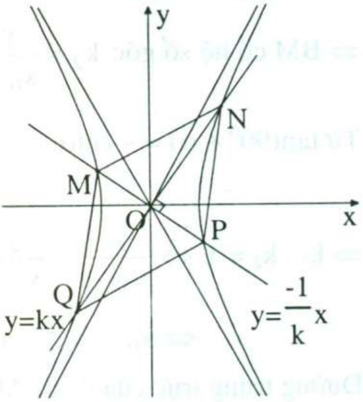
c. $MA^2 = (-a - x_0)^2 + y_0^2 = a^2 + 2ax_0 + x_0^2 + y_0^2$

$MB^2 = (a - x_0)^2 + y_0^2 = a^2 - 2ax_0 + x_0^2 + y_0^2$

$\Rightarrow \left|MA^2 - MB^2\right| = |4ax_0| = 4a.|x_0| = 2AB.OK$.

Bài 295. Trong mặt phẳng Oxy cho hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a} - \dfrac{y^2}{b} = 1 \ (b > a > 0)$

d và d' là hai đường thẳng qua O và vuông góc với nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích hình thoi với 4 đỉnh và 4 giao điểm của d và d' với (H).



Giải

Xem hình vẽ:

Gọi d: $y = kx$, d': $y = -\dfrac{1}{k}x \ (k \neq 0)$

(H): $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Tọa độ N, Q là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = kx \\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}; \frac{kab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}\right),\ Q\left(\frac{-ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}; \frac{-kab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}\right)$$

Tọa độ M, P là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{k}x \\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow M\left(\frac{-kab}{\sqrt{k^2b^2 - a^2}}; \frac{ab}{\sqrt{k^2b^2 - a^2}}\right),\ P\left(\frac{kab}{\sqrt{k^2b^2 - a^2}}; \frac{-ab}{\sqrt{k^2b^2 - a^2}}\right)$$

(có thể thay k bởi $-\dfrac{1}{k}$ trong các tọa độ của N, Q để có tọa độ M, P)

$$OM^2 = \frac{k^2a^2b^2 + a^2b^2}{k^2b^2 - a^2} = \frac{a^2b^2\left(k^2+1\right)}{k^2b^2 - a^2} \Rightarrow \frac{1}{OM^2} = \frac{k^2b^2 - a^2}{a^2b^2\left(k^2+1\right)}$$

$$ON^2 = \frac{a^2b^2 + k^2a^2b^2}{b^2 - a^2k^2} \Rightarrow \frac{1}{ON^2} = \frac{b^2 - a^2k^2}{a^2b^2\left(1+k^2\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{k^2b^2 - a^2 + b^2 - a^2k^2}{a^2b^2\left(1+k^2\right)} = \frac{\left(b^2 - a^2\right)\left(k^2+1\right)}{a^2b^2\left(k^2+1\right)} = \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} \ge \frac{2}{OM.ON} \Leftrightarrow \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2} \ge \frac{2}{OM.ON} \Leftrightarrow OM.ON \ge \frac{2a^2b^2}{b^2 - a^2}$$

$$S_{MNPQ} = 2OM.ON \ge \frac{4a^2b^2}{b^2 - a^2} \Rightarrow S_{MNPQ}\min = \frac{4a^2b^2}{b^2 - a^2} \text{ khi } OM = ON \Leftrightarrow k = 1.$$

Bài 296. Cho hai điểm $F_1\left(-2\sqrt{5}; 1\right)$, $F_2\left(2\sqrt{5}; 1\right)$

a. Viết phương trình hyperbol (H) có tâm sai $e = \sqrt{5}$, nhận F_1, F_2 làm hai tiêu điểm.

b. Tìm trên (H) bốn điểm sao cho chúng là các đỉnh của một hình bình hành có một cạnh đi qua gốc tọa độ O và có một đường trung bình nằm trên đường thẳng d: y = 4x + 1.

Giải

a. Thực hiện phép tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (0; 1)$:

$\begin{cases} x = 0 + X \\ y = 1 + Y \end{cases}$ trong hệ trục IXY, (H) có $c = 2\sqrt{5}$; $\frac{2\sqrt{5}}{a} = \sqrt{5} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 1$.

(H) có phương trình: $\frac{X^2}{4} - Y^2 = 1$. Trong IXY, d có phương trình Y = 4X

Đưa về hệ Oxy: $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$.

b. Để tính toán cho gọn, ta thực hiện mọi tính toán trên hệ IXY, sau đó đưa kết quả về hệ Oxy.

d có hệ số góc k = 4. Chọn một vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 4)$.

Xét đường thẳng Δ qua I(X_0; Y_0) và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$:

$\begin{cases} X = X_0 + t \\ Y = Y_0 + 4t \end{cases}$ $\quad M\left(X_0 + t_M; Y_0 + 4t_M\right)$, $N\left(X_0 + t_N; Y_0 + 4t_N\right)$ là 2 điểm ∈ Δ.

M, N ∈ (H) nên t_M, t_N là các nghiệm của phương trình:

$$\frac{(X_0+t)^2}{4}-4(Y_0+4t)^2=1 \Leftrightarrow 63t^2-2(X_0-16Y_0)t+X_0{}^2-4Y_0{}^2-4=0$$

$I(X_0; Y_0)$ là trung điểm MN nên:

$$\frac{X_M+X_N}{2}=X_0 \Leftrightarrow X_0+\frac{t_M+t_N}{2}=X_0 \Leftrightarrow t_M+t_N=0$$

$\Leftrightarrow X_0-16Y_0=0$: tập hợp trung điểm I của MN khi Δ di động song song với đường trung bình Y = 4X là đường thẳng: X – 16Y = 0. Đường thẳng này cũng là đường trung bình thứ hai của hình bình hành. Trong hệ Oxy, đường thẳng này có phương trình: x – 16(y – 1) = 0 ⇔ x – 16y + 16 = 0.

⇒ Tâm K của hình bình hành MNPQ mà các đỉnh của nó thuộc (H) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-16y=-16 \\ 4x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow K(0;1)$.

⇒ Cạnh đi qua gốc tọa độ O của hình bình hành song song với đường trung bình x – 16y + 16 = 0 có phương trình x – 16y = 0.

(Nếu có cạnh của hình bình hành song song với d: y = 4x + 1 và đi qua gốc O thì cạnh này có phương trình y = 4x không cắt (H))

⇒ x = 16y thế vào phương trình (H):

$$\frac{(16y)^2}{4}-(y-1)^2=1 \Leftrightarrow 64y^2-y^2+2y-1=1 \Leftrightarrow 63y^2+2y-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-1+\sqrt{127}}{63} \Rightarrow x=\dfrac{-16+16\sqrt{127}}{63} \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{127}}{63} \Rightarrow x=\dfrac{-16-16\sqrt{127}}{63} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{-16+16\sqrt{127}}{63};\frac{-1+\sqrt{127}}{63}\right) \Rightarrow P\left(\frac{16-16\sqrt{127}}{63};\frac{127-\sqrt{127}}{63}\right)$$

$$N\left(\frac{-16-16\sqrt{127}}{63};\frac{-1-\sqrt{127}}{63}\right) \Rightarrow Q\left(\frac{16+16\sqrt{127}}{63};\frac{127+\sqrt{127}}{63}\right)$$

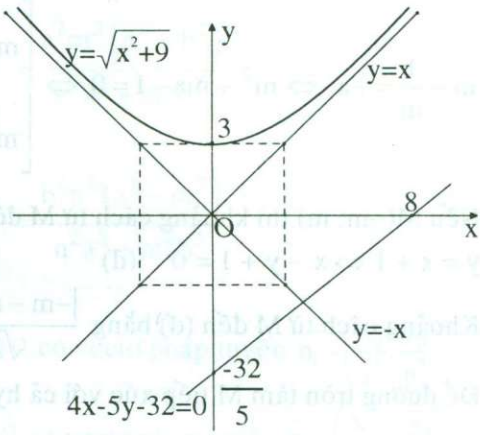
Bài 297. a) Vẽ đường cong (C): $y=\sqrt{x^2+9}$ và đường thẳng Δ: 4x – 5y – 32 = 0

b. Tính khoảng cách Z từ một điểm M tùy ý thuộc (C) đến Δ theo hoành độ x của điểm M.

c. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa đường cong (C) và đường thẳng Δ.

Giải

a. Hình vẽ:



b. $M\left(x;\sqrt{x^2+9}\right)$

$$d\left(M,(C)\right)=\frac{\left|4x-5\sqrt{x^2+9}-32\right|}{\sqrt{41}}$$

c. Điểm $M \in (C)$ mà tiếp tuyến ở đó song song với Δ sẽ là điểm có khoảng cách đến Δ ngắn nhất.

Δ có hệ số góc $k=\frac{4}{5}$

(C) $y=\sqrt{x^2+9}$ có $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

Xét phương trình $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \frac{x^2}{x^2+9}=\frac{16}{25} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{12}{3} \Rightarrow y=\frac{15}{3} \Rightarrow M\left(\frac{12}{3};\frac{15}{3}\right).$

$$d\left(M,\Delta\right)=\frac{\left|4.\frac{12}{3}-5.\frac{15}{3}-32\right|}{\sqrt{4^2+(-5)^2}}=\frac{\left|48-75-96\right|}{3\sqrt{41}}=\frac{3.41}{3\sqrt{41}}=\sqrt{41}.$$

Bài 298. Khoảng cách từ một điểm A đến một đường cong là giá trị nhỏ nhất của đoạn AM với M là điểm thuộc đường cong ấy.

a. Tính khoảng cách từ điểm A(–a; a) đến đường hyperbol $y=\frac{1}{x}$.

b. Xác định tâm và bán kính các đường tròn tiếp xúc với đường thẳng y = x + 1 và với cả hai nhánh của hyperbol $y=\frac{1}{x}$.

Giải

a. Gọi $M\left(m;\frac{1}{m}\right)$: $AM^2=(m+a)^2+\left(\frac{1}{m}-a\right)^2=m^2+\frac{1}{m^2}+2a\left(m-\frac{1}{m}\right)+2a^2$

$$=\left(m-\frac{1}{m}\right)^2+2a\left(m-\frac{1}{m}\right)+2a^2+2=\left[\left(m-\frac{1}{m}\right)+a\right]^2+a^2+2\ge a^2+2$$

$\Rightarrow AM\ge\sqrt{a^2+2} \Rightarrow$ Khoảng cách cần tìm là $\sqrt{a^2+2}$, đạt được khi:

$$m-\frac{1}{m}=-a \Leftrightarrow m^2+ma-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2} \\ m=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2} \end{array}\right. .$$

b. Nếu M(–m; m) thì khoảng cách từ M đến hyperbol bằng $\sqrt{m^2+2}$

$y = x + 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$ (d)

Khoảng cách từ M đến (d) bằng $\dfrac{|-m-m+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|2m-1|}{\sqrt{2}}$.

Để đường tròn tâm M tiếp xúc với cả hyperbol và d thì:

$$\frac{|2m-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{m^2+2} \Leftrightarrow 4m^2-4m+1=2m^2+4 \Leftrightarrow 2m^2-4m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2-\sqrt{10}}{2} \\ m=\dfrac{2+\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$$

$$m=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \sqrt{m^2+2}=\sqrt{\frac{11}{2}-\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{2}}.$$

$$m=\frac{2+\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \sqrt{m^2+2}=\sqrt{\frac{11}{2}+\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{2}}.$$

Có hai đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán:

(C_1): Tâm $M_1\left(\dfrac{2-\sqrt{10}}{2};\dfrac{\sqrt{10}-2}{2}\right)$, bán kính $R_1=\dfrac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{2}}$.

(C_2): Tâm $M_2\left(\dfrac{2-\sqrt{10}}{2};\dfrac{-2-\sqrt{10}}{2}\right)$, bán kính $R_2=\dfrac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{2}}$.

Bài 299. Cho hyperbol (H) và elip (E) có cùng tiêu điểm và cùng đi qua M. Chứng minh hai tiếp tuyến của (H) và (E) tại M vuông góc với nhau.

Giải

Giả sử elip (E) có phương trình: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Hyperbol (H) có phương trình: $\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1$

Do (E) và (H) có chung tiêu điểm nên $a^2-b^2=m^2+n^2$.

Nếu (E) và (H) cùng đi qua $M(x_0; y_0)$ thì x_0, y_0 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0{}^2}{m^2}-\dfrac{y_0{}^2}{n^2}=1 \\ \dfrac{x_0{}^2}{a^2}+\dfrac{y_0{}^2}{b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0{}^2=\dfrac{\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{b^2m^2}+\dfrac{1}{a^2n^2}}=\dfrac{a^2m^2\left(n^2+b^2\right)}{n^2a^2+m^2b^2} \\ y_0{}^2=\dfrac{\dfrac{1}{m^2}-\dfrac{1}{a^2}}{\dfrac{1}{b^2m^2}+\dfrac{1}{a^2n^2}}=\dfrac{b^2n^2\left(a^2-m^2\right)}{n^2a^2+m^2b^2} \end{cases}$$

Tiếp tuyến tại M của (E): $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}-1=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=\left(\dfrac{x_0}{a^2};\dfrac{y_0}{b^2}\right)$.

Tiếp tuyến tại M của (H): $\dfrac{x_0x}{m^2}-\dfrac{y_0y}{n^2}-1=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{x_0}{m^2};\dfrac{-y_0}{n^2}\right)$.

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=\frac{x_0{}^2}{a^2m^2}-\frac{y_0{}^2}{b^2n^2}=\frac{a^2m^2\left(n^2+b^2\right)}{a^2m^2\left(n^2a^2+m^2b^2\right)}-\frac{b^2n^2\left(a^2-m^2\right)}{b^2n^2\left(n^2a^2+m^2b^2\right)}$$

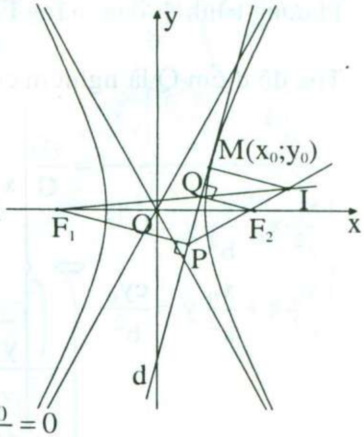
$$=\frac{n^2+b^2-a^2+m^2}{n^2a^2+m^2b^2}=\frac{m^2+n^2-\left(a^2-b^2\right)}{n^2a^2+m^2b^2}=0\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 300. Cho hyperbol (H) có hai tiêu điểm F_1, F_2. d là một tiếp tuyến của (H) tại M. Gọi P, Q là hình chiếu của F_1, F_2 trên d. I là giao điểm của F_1Q và F_2P. Chứng minh IM $\perp$ d.

Giải

Giả sử (H) có phương trình: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Tiếp tuyến d tại $M(x_0;y_0)\in$ (H): $\dfrac{x_0}{a^2}x-\dfrac{y_0}{b^2}y=1$



$F_1(-c;0)$; $F_1P\perp$ d thì phương trình F_1P có dạng:

$\dfrac{y_0}{b^2}x+\dfrac{x_0}{a^2}y+C=0$ qua $F_1\Leftrightarrow C=\dfrac{cy_0}{b^2}$.

Phương trình đường thẳng F_1P: $\dfrac{y_0}{b^2}x+\dfrac{x_0}{a^2}y+\dfrac{cy_0}{b^2}=0$

Tọa độ điểm P là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{x_0}{a^2}x-\dfrac{y_0}{b^2}y=1\\ \dfrac{y_0}{b^2}x+\dfrac{x_0}{a^2}y=\dfrac{-cy_0}{b^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\dfrac{x_0}{a^2}-\dfrac{cy_0^{\,2}}{b^4}}{\dfrac{x_0^{\,2}}{a^4}+\dfrac{y_0^{\,2}}{b^4}}\\ y=\dfrac{\dfrac{-cx_0y_0}{a^2b^2}-\dfrac{y_0}{b^2}}{\dfrac{x_0^{\,2}}{a^4}+\dfrac{y_0^{\,2}}{b^4}}\end{cases}\Rightarrow P\left(\dfrac{\dfrac{x_0}{a^2}-\dfrac{cy_0^{\,2}}{b^4}}{\dfrac{x_0^{\,2}}{a^4}+\dfrac{y_0^{\,2}}{b^4}};\dfrac{-\dfrac{y_0}{b^2}\left(\dfrac{cx_0}{a^2}+1\right)}{\dfrac{x_0^{\,2}}{a^4}+\dfrac{y_0^{\,2}}{b^4}}\right)$$

$$F(\quad c\quad;\quad 0\quad)$$

Phương trình đường thẳng F_2P:

$$\frac{x-c}{\dfrac{\dfrac{x_0}{a^2}-\dfrac{cy_0^{\,2}}{b^4}}{\dfrac{x_0^{\,2}}{a^4}+\dfrac{y_0^{\,2}}{b^4}}-c}=\frac{y}{\dfrac{-\dfrac{y_0}{b^2}\left(\dfrac{cx_0}{a^2}+1\right)}{\dfrac{x_0^{\,2}}{a^4}+\dfrac{y_0^{\,2}}{b^4}}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{y_0}{b^2}\left(\frac{cx_0}{a^2}+1\right)x+\left(\frac{x_0}{a^2}-\frac{2cy_0^{\,2}}{b^4}-\frac{cx_0^{\,2}}{a^4}\right)y=\frac{cy_0}{b^2}\left(\frac{cx_0}{a^2}+1\right)$$

$F_2Q\perp d$ thì phương trình F_2Q có dạng: $\dfrac{y_0}{b^2}x+\dfrac{x_0}{a^2}y+C=0$ qua $F_2\Leftrightarrow C=\dfrac{cy_0}{b^2}$.

Phương trình đường thẳng F_2Q: $\dfrac{y_0}{b^2}x+\dfrac{x_0}{a^2}y-\dfrac{cy_0}{b^2}=0$

Tọa độ điểm Q là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{x_0}{a^2}x-\dfrac{y_0}{b^2}y=1\\ \dfrac{y_0}{b^2}x+\dfrac{x_0}{a^2}y=\dfrac{cy_0}{b^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\dfrac{x_0}{a^2}+\dfrac{cy_0^{\,2}}{b^4}}{\dfrac{x_0^{\,2}}{a^4}+\dfrac{y_0^{\,2}}{b^4}}\\ y=\dfrac{\dfrac{cx_0y_0}{a^2b^2}-\dfrac{y_0}{b^2}}{\dfrac{x_0^{\,2}}{a^4}+\dfrac{y_0^{\,2}}{b^4}}\end{cases}\Rightarrow Q\left(\dfrac{\dfrac{x_0}{a^2}+\dfrac{cy_0^{\,2}}{b^4}}{\dfrac{x_0^{\,2}}{a^4}+\dfrac{y_0^{\,2}}{b^4}};\dfrac{\dfrac{y_0}{b^2}\left(\dfrac{cx_0}{a^2}-1\right)}{\dfrac{x_0^{\,2}}{a^4}+\dfrac{y_0^{\,2}}{b^4}}\right)$$

$$F_1(-c;0)$$

Phương trình đường thẳng F_2Q:

$$\frac{x+c}{\dfrac{\dfrac{x_0}{a^2}+\dfrac{cy_0^{\,2}}{b^4}}{\dfrac{x_0^{\,2}}{a^4}+\dfrac{y_0^{\,2}}{b^4}}+c}=\frac{y}{\dfrac{y_0}{b^2}\left(\dfrac{cx_0}{a^2}-1\right)}\Leftrightarrow\frac{x+c}{\dfrac{x_0^{\,2}}{a^2}+\dfrac{2cy_0^{\,2}}{b^4}+\dfrac{cx_0^{\,2}}{a^4}}=\frac{y}{\dfrac{y_0}{b^2}\left(\dfrac{cx_0}{a^2}-1\right)}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{y_0}{b^2}\left(\frac{cx_0}{a^2}-1\right)x-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{2cy_0^2}{b^4}+\frac{cx_0^2}{a^4}\right)y=\frac{-cy_0}{b^2}\left(\frac{cx_0}{a^2}-1\right).$$

Tọa độ giao điểm I của F_1Q và F_2P là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{y_0}{b^2}\left(\dfrac{cx_0}{a^2}-1\right)x-\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{2cy_0^2}{b^4}+\dfrac{cx_0^2}{a^4}\right)y=\dfrac{-cy_0}{b^2}\left(\dfrac{cx_0}{a^2}-1\right)\\ \dfrac{y_0}{b^2}\left(\dfrac{cx_0}{a^2}+1\right)x+\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{2cy_0^2}{b^4}-\dfrac{cx_0^2}{a^4}\right)y=\dfrac{cy_0}{b^2}\left(\dfrac{cx_0}{a^2}-1\right)\end{cases}$$

Hệ có $D=\frac{y_0}{b^2}\left[\left(\frac{cx_0}{a^2}-1\right)\left(\frac{x_0}{a^2}-\frac{2cy_0^2}{b^4}-\frac{cx_0^2}{a^4}\right)+\left(\frac{cx_0}{a^2}+1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{2cy_0^2}{b^4}+\frac{cx_0^2}{a^4}\right)\right]$

$$=\frac{4cy_0}{b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right).$$

$$Dx=\frac{cy_0}{b^2}\left[\left(\frac{cx_0}{a^2}+1\right)\left(\frac{x_0}{a^2}+\frac{2cy_0^2}{b^4}+\frac{cx_0}{a^4}\right)-\left(\frac{cx_0}{a^2}-1\right)\left(\frac{x_0}{a^2}-\frac{2cy_0^2}{b^4}-\frac{cx_0^2}{a^4}\right)\right]$$

$$=\frac{2cx_0y_0}{a^2b^2}\left(1+\frac{c^2x_0^2}{a^4}+\frac{2c^2y_0^2}{b^4}\right).$$

$$Dy=\frac{cy_0^2}{b^4}\left[\left(\frac{cx_0}{a^2}-1\right)\left(\frac{cx_0}{a^2}+1\right)+\left(\frac{cx_0}{a^2}-1\right)\left(\frac{cx_0}{a^2}+1\right)\right]=\frac{2cy_0^2}{b^4}\left(\frac{c^2x_0^2}{a^4}-1\right).$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{Dx}{D}=\frac{x_0\left(1+\frac{c^2x_0^2}{a^4}+\frac{2c^2y_0^2}{b^4}\right)}{2a^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)},\quad y=\frac{Dy}{D}=\frac{y_0\left(\frac{c^2x_0^2}{a^4}-1\right)}{2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)}.$$

Vậy I $\left(\dfrac{x_0\left(1+\frac{c^2x_0^2}{a^4}+\frac{2c^2y_0^2}{b^4}\right)}{2a^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)};\dfrac{y_0\left(\frac{c^2x_0^2}{a^4}-1\right)}{2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)}\right)$

M $(x_0; y_0)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{MI}=\left(\dfrac{x_0\left(1+\frac{c^2x_0^2}{a^4}+\frac{2c^2y_0^2}{b^4}\right)}{2a^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)}-x_0;\dfrac{y_0\left(\frac{c^2x_0^2}{a^4}-1\right)}{2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)}-y_0\right)$

d có vectơ chỉ phương $\vec{a}_d = \left(\frac{y_0}{b^2}; \frac{x_0}{a^2}\right)$.

$$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{a_d} = \left[\frac{1+\frac{c^2x_0^2}{a^4}+\frac{2c^2y_0^2}{b^4}}{2a^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)}-1\right]\frac{x_0y_0}{b^2}+\left[\frac{\frac{c^2x_0^2}{a^4}-1}{2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)}-1\right]\frac{x_0y_0}{a^2}$$

$$=\frac{x_0y_0}{2a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)}\left[1+\frac{c^2x_0^2}{a^4}+\frac{2c^2y_0^2}{b^4}-2a^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)+\frac{c^2x_0^2}{a^4}-1-2b\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)\right]$$

$$=\frac{x_0y_0}{2a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)}\left(\frac{c^2x_0^2}{a^4}+\frac{2c^2y_0^2}{b^4}-\frac{2a^2x_0^2}{a^4}-\frac{2a^2y_0^2}{b^4}+\frac{c^2x_0^2}{a^4}-\frac{2b^2x_0^2}{a^4}-\frac{2b^2y_0^2}{b^4}\right)$$

$$=\frac{x_0y_0}{2a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)}\left[\frac{2c^2x_0^2}{a^4}-\frac{2\left(a^2+b^2\right)x_0^2}{a^4}+\frac{2c^2y_0^2}{b^4}-\frac{2\left(a^2+b^2\right)y_0^2}{b^4}\right]$$

$$=\frac{x_0y_0}{2a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)}\left(\frac{2c^2x_0^2}{a^4}-\frac{2c^2x_0^2}{a^4}+\frac{2c^2y_0^2}{b^4}-\frac{2c^2y_0^2}{b^4}\right)=0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

♦ Lời bình: Kĩ năng tính toán quả thật rất cần cho những bài tập mà các điều kiện cho trong đề toán đều không phải bằng số mà bằng chữ, tham số.

Bài 301. Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Hai tiếp tuyến của (H) cắt hai tiệm cận theo thứ tự tại P, Q và A, B.

a. Chứng minh OP . OQ = $a^2 + b^2$ và AQ // BP.

b. P' và Q đối xứng qua Oy. Chứng minh ba điểm P, P', Q và hai tiêu điểm nằm trên một đường tròn.

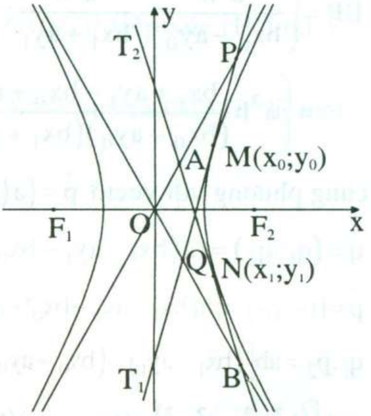
Giải

a. Phương trình tiếp tuyến (T_1) của (H) tại M(x_0; y_0): $\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1$

Tọa độ P là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{a^2}x - \dfrac{y_0}{b^2}y = 1 \\ y = \dfrac{b}{a}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x_0}{a^2} - \dfrac{y_0}{ab}\right)x = 1 \\ y = \dfrac{b}{a}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a^2b}{bx_0 - ay_0} \\ y = \dfrac{ab^2}{bx_0 - ay_0} \end{cases}$$

$$P\left(\frac{a^2b}{bx_0 - ay_0};\ \frac{ab^2}{bx_0 - ay_0}\right).$$



Tọa độ Q là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{a^2}x - \dfrac{y_0}{b^2}y = 1 \\ y = -\dfrac{b}{a}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a^2b}{bx_0 + ay_0} \\ y = \dfrac{-ab^2}{bx_0 + ay_0} \end{cases}$$

$$Q\left(\frac{a^2b}{bx_0 + ay_0};\ \frac{-ab^2}{bx_0 + ay_0}\right)$$

Phương trình tiếp tuyến (T_2) của (H) tại $N(x_1; y_1)$: $\dfrac{x_1}{a^2}x - \dfrac{y_1}{b^2}y = 1$

Tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a^2}x - \dfrac{y_1}{b^2}y = 1 \\ y = \dfrac{b}{a}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a^2b}{bx_1 - ay_1} \\ y = \dfrac{ab^2}{bx_1 - ay_1} \end{cases} \quad A\left(\frac{a^2b}{bx_1 - ay_1};\ \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1}\right)$$

Tương tự: $B\left(\dfrac{a^2b}{bx_1 + ay_1};\ \dfrac{-ab^2}{bx_1 + ay_1}\right)$

$$OP = \sqrt{\frac{a^4b^2}{(bx_0 - ay_0)^2} + \frac{a^2b^4}{(bx_0 - ay_0)^2}} = \frac{ab}{|bx_0 - ay_0|}.\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$OQ = \sqrt{\frac{a^4b^2}{(bx_0 + ay_0)^2} + \frac{a^2b^4}{(bx_0 + ay_0)^2}} = \frac{ab}{|bx_0 + ay_0|}.\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow OP.OQ = \frac{a^2b^2}{\left|b^2x_0{}^2 - a^2y_0{}^2\right|}.(a^2 + b^2) = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}.(a^2 + b^2) = a^2 + b^2$$

$$\overrightarrow{AQ} = \left(\frac{a^2b}{bx_0 + ay_0} - \frac{a^2b}{bx_1 - ay_1};\ \frac{-ab^2}{bx_0 + ay_0} - \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1}\right)$$

$$=\left(a^2b\frac{bx_1-ay_1-bx_0-ay_0}{(bx_0+ay_0)(bx_1-ay_1)};-ab^2\frac{bx_1-ay_1+bx_0+ay_0}{(bx_0+ay_0)(bx_1-ay_1)}\right)$$

cùng phương với vectơ $\vec{q}=\big(a(bx_1-ay_1-bx_0-ay_0);b(-bx_1+ay_1-bx_0-ay_0)\big)$

$$\overrightarrow{BP}=\left(\frac{a^2b}{bx_0-ay_0}-\frac{a^2b}{bx_1+ay_1};\frac{ab^2}{bx_0-ay_0}+\frac{ab^2}{bx_1+ay_1}\right)$$

$$=\left(a^2b\frac{bx_1+ay_1-bx_0+ay_0}{(bx_0-ay_0)(bx_1+ay_1)};ab^2\frac{bx_1+ay_1+bx_0-ay_0}{(bx_0-ay_0)(bx_1+ay_1)}\right)$$

cùng phương với vectơ $\vec{p}=\big(a(bx_1+ay_1-bx_0+ay_0);b(bx_1+ay_1+bx_0-ay_0)\big)$

$\vec{q}=(q_1;q_2)=\big(a(bx_1-ay_1-bx_0-ay_0);b(-bx_1+ay_1-bx_0-ay_0)\big)$

$\vec{p}=(p_1;p_2)=\big(a(bx_1+ay_1-bx_0+ay_0);b(bx_1+ay_1+bx_0-ay_0)\big)$

$q_1.p_2=ab\big[(bx_1-ay_1)-(bx_0+ay_0)\big]\big[(bx_1+ay_1)+(bx_0-ay_0)\big]$

$=ab\Big[\big(b^2x_1{}^2-a^2y_1{}^2\big)+(bx_1-ay_1)(bx_0-ay_0)-(bx_0+ay_0)(bx_1+ay_1)-\big(b^2x_0{}^2-a^2y_0{}^2\big)\Big]$

$=ab\big[a^2b^2+b^2x_0x_1-abx_1y_0-abx_0y_1+a^2y_0y_1-b^2x_0x_1-abx_1y_0-abx_0y_1-a^2y_0y_1-a^2b^2\big]$

$=-2a^2b^2(x_1y_0+x_0y_1).$

$q_2.p_1=ab\big[(bx_1+ay_1)-(bx_0-ay_0)\big]\big[-(bx_1-ay_1)-(bx_0+ay_0)\big]$

$=ab\Big[-\big(b^2x_1{}^2-a^2y_1{}^2\big)+(bx_1-ay_1)(bx_0-ay_0)-(bx_0+ay_0)(bx_1+ay_1)-\big(b^2x_0{}^2-a^2y_0{}^2\big)\Big]$

$=ab\big[-a^2b^2+b^2x_0x_1-abx_1y_0-abx_0y_1+a^2y_0y_1-b^2x_0x_1-abx_1y_0-abx_0y_1-a^2y_0y_1+a^2b^2\big]$

$=-2a^2b^2(x_1y_0+x_0y_1).$

$\Rightarrow q_1p_2=q_2p_1 \Leftrightarrow \vec{p}$ cùng phương $\vec{q} \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ}$ cùng phương $\overrightarrow{BP} \Rightarrow AQ \,//\, BP$.

b. $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, $P\left(\frac{a^2b}{bx_0-ay_0};\frac{ab^2}{bx_0-ay_0}\right)$, $Q\left(\frac{a^2b}{bx_0+ay_0};\frac{-ab^2}{bx_0+ay_0}\right)$

$P'\left(\frac{-a^2b}{bx_0+ay_0};\frac{-ab^2}{bx_0+ay_0}\right)$.

F_1F_2 và P'Q song song với nhau, có chung đường trung trực là trục Oy. Đường trung trực của đoạn thẳng PF_2 (hoặc PF_1) cắt trục Oy tại T. T là tâm của đường tròn đi qua 5 điểm: F_1, F_2, P', Q và P.

Bài 302. Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ có hai tiệm cận d_1: $y=\frac{b}{a}x$ và d_2: $y=-\frac{b}{a}x$.

Gọi (H’) là hyperbol $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$. Từ điểm M trên d_1 kẻ tiếp tuyến t với (H) và tiếp tuyến t’ với (H’). t tiếp xúc (H) tại T và cắt d_2 tại N; t’ tiếp xúc (H’) tại T’ và cắt d_2 tại N’. Chứng minh:

a. T, T’, O lần lượt là trung điểm của MN, MN’ và NN’. Suy ra OTMT’ là hình bình hành.

b. Hình bình hành OTMT’ có diện tích không đổi.

c. $OT^2 - OT'^2$ là hằng số.

Giải

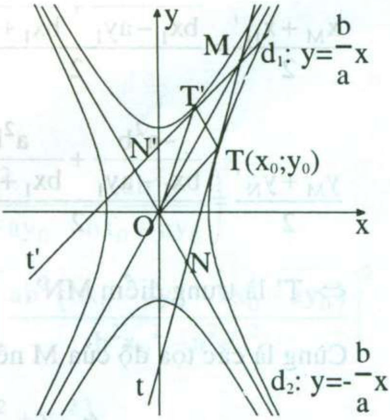
a. Giả sử $T(x_0; y_0)$. Phương trình t: $\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1$

$M\left(m;\frac{b}{a}m\right)$, t qua M $\Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}m-\frac{y_0}{b^2}.\frac{b}{a}m=1$

$$\Leftrightarrow m\left(\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0}{ab}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{1}{\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0}{ab}}=\frac{a^2b}{bx_0-ay_0}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{a^2b}{bx_0-ay_0};\frac{ab^2}{bx_0-ay_0}\right)$$



Tọa độ N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1\\ y=-\frac{b}{a}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{a^2b}{bx_0+ay_0}\\ y=\frac{-ab^2}{bx_0+ay_0}\end{cases}\Rightarrow N\left(\frac{a^2b}{bx_0+ay_0};\frac{-ab^2}{bx_0+ay_0}\right)$$

$$\frac{x_M+x_N}{2}=\frac{\frac{a^2b}{bx_0-ay_0}+\frac{a^2b}{bx_0+ay_0}}{2}=\frac{a^2b\left(bx_0+ay_0+bx_0-ay_0\right)}{2\left(b^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2\right)}=\frac{a^2b.2bx_0}{2a^2b^2}=x_0$$

$$\frac{y_M+y_N}{2}=\frac{\frac{ab^2}{bx_0-ay_0}+\frac{-a^2b}{bx_0+ay_0}}{2}=\frac{ab^2\left(bx_0+ay_0-bx_0+ay_0\right)}{2\left(b^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2\right)}=\frac{a^2b.2ay_0}{2a^2b^2}=y_0$$

$\Rightarrow$ T là trung điểm MN.

Giả sử T'(x_1; y_1). Phương trình t': $\dfrac{x_1}{a^2}x - \dfrac{y_1}{b^2}y = -1$

$$\text{t' qua } M\left(m; \frac{b}{a}m\right) \Leftrightarrow \frac{x_1}{a^2}m - \frac{y_1}{b^2}.\frac{b}{a}m = -1 \Leftrightarrow m = \frac{-a^2b}{bx_1 - ay_1}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{-a^2b}{bx_1 - ay_1}; \frac{-ab^2}{bx_1 - ay_1}\right)$$

Tọa độ N' là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a^2}x - \dfrac{y_1}{b^2}y = -1 \\ y = -\dfrac{b}{a}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-a^2b}{bx_1 + ay_1} \\ y = \dfrac{ab^2}{bx_1 + ay_1} \end{cases} \Rightarrow N'\left(\frac{-a^2b}{bx_1 + ay_1}; \frac{ab^2}{bx_1 + ay_1}\right)$$

$$\frac{x_M + x_N{'}}{2} = \frac{\dfrac{-a^2b}{bx_1 - ay_1} + \dfrac{-a^2b}{bx_1 + ay_1}}{2} = \frac{-a^2b\left(bx_1 + ay_1 + bx_1 - ay_1\right)}{2\left(b^2x_1{}^2 - a^2y_1{}^2\right)} = \frac{-a^2b.2bx_1}{2a^2b^2} = x_1$$

$$\frac{y_M + y_N{'}}{2} = \frac{\dfrac{-a^2b}{bx_1 - ay_1} + \dfrac{a^2b}{bx_1 + ay_1}}{2} = \frac{-a^2b\left(bx_1 + ay_1 - bx_1 + ay_1\right)}{2\left(b^2x_1{}^2 - a^2y_1{}^2\right)} = \frac{-a^2b.2ay_1}{-2a^2b^2} = y_1$$

$\Leftrightarrow$ T' là trung điểm MN'.

Cùng là các tọa độ của M nên: $\dfrac{a^2b}{bx_0 - ay_0} = \dfrac{-a^2b}{bx_1 - ay_1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{bx_0 - ay_0} = \dfrac{-1}{bx_1 - ay_1}$

$$\Leftrightarrow \frac{bx_0 + ay_0}{b^2x_0{}^2 - a^2y_0{}^2} = \frac{-(bx_1 + ay_1)}{b^2x_1{}^2 - a^2y_1{}^2} \Leftrightarrow \frac{bx_0 + ay_0}{a^2b^2} = \frac{bx_1 + ay_1}{a^2b^2} \Leftrightarrow bx_0 + ay_0 = bx_1 + ay_1$$

Vậy các tọa độ N và N' có thể biểu diễn lại là:

$$N\left(\frac{a^2b}{bx_0 + ay_0}; \frac{-ab^2}{bx_0 + ay_0}\right), \quad N'\left(\frac{-a^2b}{bx_0 + ay_0}; \frac{ab^2}{bx_0 + ay_0}\right)$$

$\Rightarrow$ N và N' đối xứng nhau qua O $\Leftrightarrow$ O là trung điểm NN'.

Tam giác MNN' có: OT' là đường trung bình: OT' // = $\dfrac{1}{2}$MN = MT

OT là đường trung bình: OT // = $\dfrac{1}{2}$MN' = T'M

$\Leftrightarrow$ OTMT' là hình bình hành.

b. $S_{OTMT'} = \frac{1}{2}S_{MNN'}$. d_2 có phương trình tổng quát $bx + ay = 0$

$$d\left(M, d_2\right) = \frac{\left|bx_M + ay_M\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\left|\frac{a^2b^2}{bx_0 - ay_0} + \frac{a^2b^2}{bx_0 - ay_0}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\left|bx_0 - ay_0\right|}$$

$$NN' = 2ON = 2\sqrt{\left(\frac{a^2b}{bx_0+ay_0}\right)^2 + \left(\frac{-ab^2}{bx_0+ay_0}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{a^4b^2 + a^2b^4}{\left(bx_0+ay_0\right)^2}} = \frac{2ab\sqrt{a^2+b^2}}{\left|bx_0+ay_0\right|}$$

$$S_{MNN'} = \frac{1}{2}NN'.d\left(M, d_2\right) = \frac{1}{2}.\frac{2ab\sqrt{a^2+b^2}}{\left|bx_0+ay_0\right|}.\frac{2a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\left|bx_0-ay_0\right|}$$

$$= \frac{ab\sqrt{a^2+b^2}.2a^2b^2}{a^2b^2.\sqrt{a^2+b^2}} = 2ab$$

$$\Rightarrow S_{OTMT'} = \frac{1}{2}S_{MNN'} = ab.$$

c. $OT = \frac{1}{2}MN' \Rightarrow OT^2 = \frac{1}{4}MN'^2$

$$MN'^2 = \left(\frac{-a^2b}{bx_0+ay_0} - \frac{a^2b}{bx_0-ay_0}\right)^2 + \left(\frac{ab^2}{bx_0+ay_0} - \frac{ab^2}{bx_0-ay_0}\right)^2$$

$$= \left[\frac{-a^2b\left(bx_0 - ay_0 + bx_0 + ay_0\right)}{b^2x_0{}^2 - a^2y_0{}^2}\right]^2 + \left[\frac{ab^2\left(bx_0 - ay_0 - bx_0 - ay_0\right)}{b^2x_0{}^2 - a^2y_0{}^2}\right]^2$$

$$= \frac{a^4b^2.4b^2x_0{}^2}{a^4b^4} + \frac{a^2b^4.4a^2y_0{}^2}{a^4b^4} = 4\left(x_0{}^2 + y_0{}^2\right)$$

$OT' = \frac{1}{2}MN \Rightarrow OT'^2 = \frac{1}{4}MN^2$

$$MN^2 = \left(\frac{a^2b}{bx_0+ay_0} - \frac{a^2b}{bx_0-ay_0}\right)^2 + \left(\frac{-ab^2}{bx_0+ay_0} - \frac{ab^2}{bx_0-ay_0}\right)^2$$

$$= \left[\frac{a^2b\left(bx_0 - ay_0 - bx_0 - ay_0\right)}{b^2x_0{}^2 - a^2y_0{}^2}\right]^2 + \left[\frac{-ab^2\left(bx_0 - ay_0 + bx_0 + ay_0\right)}{b^2x_0{}^2 - a^2y_0{}^2}\right]^2$$

$$= \frac{a^4b^2.4a^2y_0{}^2}{a^4b^4} + \frac{a^2b^4.4b^2x_0{}^2}{a^4b^4} = 4\left(\frac{a^2y_0{}^2}{b^2} + \frac{b^2x_0{}^2}{a^2}\right)$$

$$OT^2 = \frac{1}{4}MN'^2 = \left(x_0^2 + y_0^2\right);\ OT'^2 = \frac{1}{4}MN^2 = \frac{a^2y_0^2}{b^2} + \frac{b^2x_0^2}{a^2}$$

$$OT^2 - OT'^2 = x_0^2 - \frac{a^2y_0^2}{b^2} + y_0^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2} = \frac{b^2x_0^2 - a^2y_0^2}{b^2} + \frac{a^2y_0^2 - b^2x_0^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2b^2}{b^2} - \frac{a^2b^2}{a^2} = a^2 - b^2.$$

Bài 303. Cho điểm F(3; 0) và điểm E di động trên Oy với $y_E \geq 0$. Đặt $\alpha = \widehat{OFE}$; A_1, A_2 là hai điểm sao cho $\overrightarrow{FA_1} = 2\overrightarrow{A_1E}$, $\overrightarrow{FA_2} = -2\overrightarrow{A_2E}$. Xét các hyperbol (H_α) có một tiêu điểm là F và 2 đỉnh là A_1, A_2:

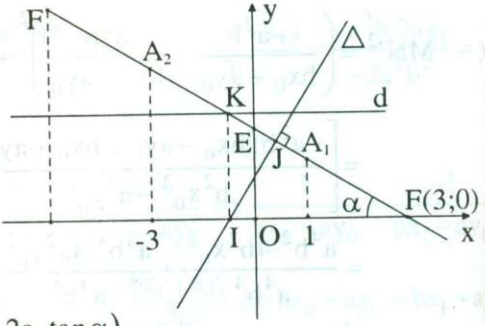
a. Tính hoành độ của A_1, A_2. Tính tung độ của A_1, A_2 theo α;

b. Tính góc nhọn hợp bởi hai tiệm cận của (H_α);

c. Định α để hyperbol (H_α) có một tiệm cận song song với Ox. Trong trường hợp này hãy tính hoành độ giao điểm I của đường chuẩn Δ tương ứng với F và Ox, chứng minh (H_α) cắt Ox tại G. Tính $\frac{GF}{GI}$ và x_G;

d. Biện luận theo k số hyperbol (H_α) tiếp xúc với d: y = k (k > 0).

Giải



a. OE = 3tanα ⇒ E(0; 3tanα).

Phương trình đường thẳng FE chứa trục thực của (H_α): $\frac{x}{3} + \frac{y}{3\tan\alpha} = 1$

⇔ y = (3 – x).tanα.

Gọi $A_1(a_1; (3 - a_1)\tan\alpha)$ thì:

$$\overrightarrow{FA_1} = \left(a_1 - 3; (3 - a_1).\tan\alpha\right)$$

$$\overrightarrow{A_1E} = \left(-a_1; a_1\tan\alpha\right) \Rightarrow 2\overrightarrow{A_1E} = \left(-2a_1; 2a_1\tan\alpha\right)$$

$$\overrightarrow{FA_1} = 2\overrightarrow{A_1E} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 - 3 = -2a_1 \\ (3 - a_1)\tan\alpha = 2a_1\tan\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ y_{A_1} = 2\tan\alpha \end{cases} \Rightarrow A_1(1; 2\tan\alpha).$$

$$A_2\left(a_2; (3 - a_2)\tan\alpha\right) \Rightarrow \overrightarrow{FA_2} = \left(a_2 - 3; (3 - a_2)\tan\alpha\right)$$

$$\overrightarrow{A_2E} = \left(-a_2; a_2\tan\alpha\right) \Rightarrow -2\overrightarrow{A_2E} = \left(2a_2; -4a_2\tan\alpha\right)$$

$$\overrightarrow{FA_2} = -2\overrightarrow{A_2E} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 - 3 = 2a_2 \\ (3 - a_2)\tan\alpha = -4a_2\tan\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -3 \\ y_{A_2} = 6\tan\alpha \end{cases} \Rightarrow A_2(-3; 6\tan\alpha).$$

b. (H_α) có trục thực $2a = A_1A_2 = \sqrt{(-3-1)^2 + 4^2\tan^2\alpha} = \frac{4}{\cos\alpha}$

Gọi K là trung điểm A_1A_2: K(−1; 4tanα)

$\Rightarrow$ (H_α) có tiêu cự $2c = 2KF = 2\sqrt{4^2 + 16\tan^2\alpha} = \dfrac{8}{\cos\alpha} \Leftrightarrow c = \dfrac{4}{\cos\alpha}$.

$$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 - a^2 = \frac{16}{\cos^2\alpha} - \frac{4}{\cos^2\alpha} = \frac{12}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow b = \frac{2\sqrt{3}}{\cos\alpha}.$$

Hệ số góc của tiệm cận xiên của (H_α) là $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{\cos\alpha}}{\dfrac{2}{\cos\alpha}} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ Tiệm cận xiên của (H_α) tạo với trục thực của (H_α) góc 60^0 $\Rightarrow$ Góc nhọn giữa hai tiệm cận của (H_α) là 60^0.

c. Tiệm cận d (hình vẽ) song song với trục Ox tạo ra hai góc so le trong $\widehat{KFO} = d\widehat{KF} \Leftrightarrow \alpha = 60^0$.

Khi $\alpha = 60^0$ thì $\left(H_{60^0}\right)$ có $a = \dfrac{2}{\cos 60^0} = 4$; $c = \dfrac{4}{\cos 60^0} = 8$; $\dfrac{a^2}{c} = \dfrac{16}{8} = 2$.

Trục thực của $\left(H_{60^0}\right)$: $\sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0$.

Trục thực cắt đường chuẩn tại $J\left(x; \sqrt{3}(3-x)\right)$ thì $FJ = \dfrac{a^2}{c} = 2$

$$\Leftrightarrow FJ^2 = 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 + 3(3-x)^2 = 4 \Leftrightarrow 4(x-3)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \text{ (loại)} \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow J\left(2; \sqrt{3}\right)$$

Đường chuẩn Δ qua J và vuông góc với trục thực $\sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0$ nên có phương trình: $x - \sqrt{3}y + 1 = 0 \Rightarrow$ Δ cắt Ox tại I(−1; 0).

Gọi F'(x; y) là tiêu điểm đối xứng với F(3; 0) qua $K\left(-1; 4\sqrt{3}\right)$ thì:

$$\begin{cases} x + 3 = -2 \\ y + 0 = 8\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 8\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow F'\left(-5; 8\sqrt{3}\right).$$

Gọi $M(x; y) \in \left(H_{60^0}\right) \Leftrightarrow F'M - FM = 8$

$$F'M^2 = (x+5)^2 + \left(y - 8\sqrt{3}\right)^2 = x^2 + 10x + 25 + y^2 - 16\sqrt{3}y + 192$$

$$FM^2 = (x-3)^2 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2$$

$$F'M^2 - FM^2 = 16x - 16\sqrt{3}y + 208;\quad F'M - FM = 8$$

$$\Rightarrow F'M + FM = 2x - 2\sqrt{3}y + 26 \Rightarrow FM = x - \sqrt{3y} + 7$$

$$\Rightarrow \left(x - \sqrt{3}y + 7\right)^2 = (x-3)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3y^2 + 49 - 2\sqrt{3}xy + 14x - 14\sqrt{3}y = x^2 - 6x + 9 + y^2$$

$\Leftrightarrow 2y^2 - 2\sqrt{3}xy + 20x - 14\sqrt{3}y + 40 = 0$ là phương trình của $\left(H_{60^0}\right)$

$y = 0$ thì $x = -2$: $x_G = -2$. $\left(H_{60^0}\right)$ cắt Ox tại G(–2; 0).

$GF = \sqrt{\left(3-(-2)\right)^2} = 5$; $GI = 1$; $\dfrac{GF}{GI} = 5$.

d. Do vị trí của (H_α) trên hệ Oxy nên $y = k$ $(k > 0)$ luôn cắt (H_α) tại hai điểm phân biệt: không có giá trị nào của k để (H_α) tiếp xúc với $y = k$.

Bài 304. Cho hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Từ điểm $P(\alpha;\ \beta)$ không nằm trên hai đường tiệm cận của (H) kẻ các đường thẳng song song với các tiệm cận của (H); các đường thẳng này cắt các tiệm cận của (H) tại M, N.

a. Viết phương trình đường thẳng MN;

b. Tìm tập hợp các điểm P khi đường thẳng MN qua tâm O của (H);

c. Cố định $P(\alpha;\ \beta)$ với P không nằm trên hai tiệm cận và không nằm trên Oy. Gọi K là hình chiếu của O trên đường thẳng MN. Tìm quỹ tích của K khi ta cố định các đỉnh A_1, A_2 của (H) và cho góc giữa hai tiệm cận biến thiên.

Giải

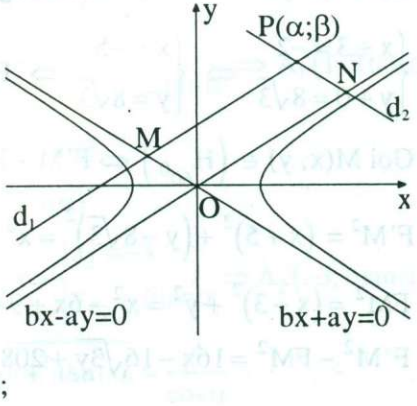
a. Gọi d_1 là đường thẳng song song với tiệm cận $bx - ay = 0$.

Phương trình d_1 có dạng: $bx - ay + C = 0$ d_1 qua $P(\alpha;\ \beta)$

$\Leftrightarrow \alpha b - \beta a + C \Leftrightarrow C = a\beta - b\alpha$

Phương trình d_1: $bx - ay + a\beta - b\alpha = 0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:



$$\begin{cases} bx - ay = b\alpha - a\beta \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{b\alpha - a\beta}{2b} \\ y = \dfrac{-b\alpha + a\beta}{2a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M\left(\frac{b\alpha - a\beta}{2b};\ \frac{-b\alpha + a\beta}{2a}\right).$$

d_2 là đường thẳng song song với tiệm cận: $bx + ay = 0$.

Phương trình d_2 có dạng: $bx + ay + C = 0$;

d_2 qua $P(\alpha;\beta) \Leftrightarrow \alpha b+\beta a+C=0 \Leftrightarrow C=-\alpha b-\beta a$.

Phương trình d_2: $bx+ay-\alpha b-\beta a=0$. Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} bx-ay=0 \\ bx+ay=\alpha b+\beta a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\alpha b+\beta a}{2b} \\ y=\dfrac{\alpha b+\beta a}{2a} \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{\alpha b+\beta a}{2b};\frac{\alpha b+\beta a}{2a}\right)$$

Phương trình đường thẳng MN: $\dfrac{x-\dfrac{\alpha b-\beta a}{2b}}{\dfrac{\alpha b+\beta a-\alpha b+\beta a}{2b}}=\dfrac{y-\dfrac{\alpha b+\beta a}{2a}}{\dfrac{\alpha b+\beta a+\alpha b-\beta a}{2a}}$

$$\Leftrightarrow \frac{2bx-\alpha b+\beta a}{2\beta a}=\frac{2y-\alpha b-\beta a}{2\alpha\beta}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha b^2x-\alpha^2b^2+\alpha\beta ab=2\beta a^2y-\alpha\beta ab-\beta^2a^2$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha b^2x-2\beta a^2y+2\alpha\beta ab-\alpha^2b^2+\beta^2a^2=0$$

b. Khi đường thẳng MN đi qua tâm O của (H) thì:

$$2\alpha\beta.ab-\alpha^2b^2+\beta^2a^2=0 \Leftrightarrow \alpha^2b^2-\beta^2a^2=2\alpha\beta ab$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2b^2}{2\alpha\beta ab}-\frac{\beta^2a^2}{2\alpha\beta ab}=1 \Leftrightarrow \frac{\alpha b}{2\beta a}-\frac{\beta a}{2\alpha b}=1$$

Coi P(x; y) thì tập hợp các điểm P là đường có phương trình: $\dfrac{bx}{2ay}-\dfrac{ay}{2bx}=1$.

c. $P(\alpha;\beta)$ cố định $\Leftrightarrow \alpha, \beta$ là hằng số. Các đỉnh A_1, A_2 cố định $\Leftrightarrow$ a là hằng số.

Góc giữa hai tiệm cận biến thiên $\Leftrightarrow \dfrac{b}{a}$ biến thiên $\Leftrightarrow$ b biến thiên.

Đường thẳng qua O và vuông góc với đường thẳng MN có phương trình:

$$2\beta a^2x+2\alpha b^2y=0$$

Tọa độ K là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2\alpha b^2x-2\beta a^2y=\alpha^2b^2-\beta^2a^2-2\alpha\beta ab \\ 2\beta a^2x+2\alpha b^2y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2\alpha^3b^4-2\alpha\beta^2a^2b^2-4\alpha^2\beta ab^3}{4\alpha^2b^4+4\beta^2a^4} \\ y=\dfrac{-2\alpha^2\beta a^2b^2+2\beta^3a^4+2\alpha\beta^2a^3b}{4\alpha^2b^4+4\beta^2a^4} \end{cases}$$

Đặt: $\dfrac{b}{a}=t \Leftrightarrow b=at$ biến thiên theo t:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\left(2\alpha^3b^4 - 2\alpha\beta^2a^2b^2 - 4\alpha^2\beta ab^3\right) : \alpha^2\beta^2a^2b^2}{\left(4\alpha^2b^4 + 4\beta^2a^4\right) : \alpha^2\beta^2a^2b^2} \\ y = \dfrac{\left(-2\alpha^2\beta a^2b^2 + 2\beta^3a^4 + 2\alpha\beta^2a^3b\right) : \alpha^2\beta^2a^2b^2}{\left(4\alpha^2b^4 + 4\beta^2a^4\right) : \alpha^2\beta^2a^2b^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{2\alpha}{\beta a^2}.a^2t^2 - \dfrac{2}{\alpha} - \dfrac{4}{\beta a}.at}{\dfrac{4\left(a^2t^2\right)}{\beta^2a^2} + \dfrac{4a^2}{\alpha^2.\left(a^2t^2\right)}} \\ y = \dfrac{-\dfrac{2}{\beta} + \dfrac{2\beta a^2}{\alpha^2\left(a^2t^2\right)} + \dfrac{2a}{\alpha(at)}}{\dfrac{4\left(a^2t^2\right)}{\beta^2a^2} + \dfrac{4a^2}{\alpha^2.\left(a^2t^2\right)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{2\alpha}{\beta^2}.t^2 - \dfrac{4}{\beta}t - \dfrac{2}{\alpha}}{\dfrac{4}{\beta^2}t^2 + \dfrac{4}{\alpha^2t^2}} \\ y = \dfrac{-\dfrac{2}{\beta} + \dfrac{2\beta}{\alpha^2t^2} + \dfrac{2}{\alpha t}}{\dfrac{4}{\beta^2}t^2 + \dfrac{4}{\alpha^2t^2}} \end{cases} \quad (t \neq 0) \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ (∗) là phương trình tham số của tập hợp K.

Bài 305. Cho hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và điểm $P(x_0;\ y_0)$ không nằm trên hai tiệm cận của (H). Đường thẳng di động d qua P và cắt (H) tại M, N. Chứng minh trung điểm K của đoạn MN nằm trên một hyperbol cố định.

Giải

d có phương trình: $y = k(x - x_0) + y_0 = kx + y_0 - kx_0$. Thế vào phương trình (H):

$$b^2x^2 - a^2\left(kx + y_0 - kx_0\right)^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2\left(k^2x^2 + y_0{}^2 + k^2x_0{}^2 + 2ky_0x - 2k^2x_0x - 2kx_0y_0\right) - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(b^2 - a^2k^2\right)x^2 - 2ka^2\left(y_0 - kx_0\right)x - a^2y_0{}^2 - a^2k^2x_0{}^2 + 2ka^2x_0y_0 - a^2b^2 = 0$$

x_M, x_N là hai nghiệm của phương trình này: $\dfrac{x_M + x_N}{2} = \dfrac{ka^2\left(y_0 - kx_0\right)}{b^2 - a^2k^2}$

Gọi x, y là các tọa độ của K thì:

$$\begin{cases} x = \dfrac{ka^2\left(y_0 - kx_0\right)}{b^2 - a^2k^2} \quad (1) \\ y = k\left(\dfrac{ka^2\left(y_0 - kx_0\right)}{b^2 - a^2k^2} - x_0\right) + y_0 = \dfrac{b^2\left(y_0 - kx_0\right)}{b^2 - a^2k^2} \quad (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{ka^2}{b^2} \Rightarrow k = \frac{b^2x}{a^2y}$ thế vào (2):

$$y = \frac{b^2\left(y_0 - \frac{b^2x}{a^2y}x_0\right)}{b^2 - a^2.\frac{b^4x^2}{a^4y^2}} = \frac{b^2\left(y_0 - \frac{b^2x_0x}{a^2y}\right)}{b^2\left(1 - \frac{b^2x}{a^2y^2}\right)} = \frac{y\left(a^2y_0y - b^2x_0x\right)}{a^2y^2 - b^2x^2}$$

$$\Rightarrow a^2y^2 - b^2x^2 = a^2y_0y - b^2x_0x \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{y_0y}{b^2} - \frac{x_0x}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x_0x}{a^2} + \frac{x_0^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y_0y}{b^2} + \frac{y_0^2}{4b^2}\right) = \frac{x_0^2}{4a^2} - \frac{y_0^2}{4b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{x_0}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y - \frac{y_0}{2}\right)^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{4a^2} - \frac{y_0^2}{4b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{x_0}{2}\right)^2}{a^2\left(\frac{x_0^2}{4a^2} - \frac{y_0^2}{4b^2}\right)} - \frac{\left(y - \frac{y_0}{2}\right)^2}{b^2\left(\frac{x_0^2}{4a^2} - \frac{y_0^2}{4b^2}\right)} = 1$$ là phương tình của một hyperbol cố định

$\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Bài 306. Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2. Điểm M di động trên (H). Các đường thẳng F_1M và F_2M lại cắt (H) tại N_1, N_2 (N_1, N_2 không trùng M). Chứng minh đường thẳng N_1N_2 luôn tiếp xúc với một hyperbol cố định.

Giải

Gọi $M(x_0; y_0) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$

- $M(x_0; y_0)$, $F_1(-c; 0) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng F_1M: $y = \frac{y_0(x+c)}{x_0 + c}$

  F_1M cắt (H) tại N_1: Phương trình hoành độ giao điểm N_1:

$$b^2x^2 - a^2\left[\frac{y_0(x+c)}{x_0+c}\right]^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x_0+c)^2b^2 - a^2y_0^2\right]x^2 - 2a^2y_0^2cx - a^2b^2(x_0+c)^2 = 0$$

x_0, x_{N_1} là hai nghiệm của phương trình nên: $x_{N_1}+x_0=\dfrac{2a^2{y_0}^2c}{\left[(x_0+c)^2b^2-a^2{y_0}^2\right]}$

$$x_{N_1}+x_0=\frac{2a^2{y_0}^2c}{\left({x_0}^2+2cx_0+c^2\right)b^2-a^2{y_0}^2}=\frac{2a^2{y_0}^2c}{\left(b^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2\right)+b^2c^2-2b^2cx_0}$$

$$=\frac{2a^2{y_0}^2c}{a^2b^2+b^2c^2+2b^2cx_0}=\frac{2a^2{y_0}^2c}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}$$

$$\Rightarrow x_{N_1}=\frac{2a^2{y_0}^2c}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}-x_0\Rightarrow y_{N_1}=\frac{y_0\left(x_{N_1}+c\right)}{x_0+c}.$$

- $M(x_0;y_0)$, $F_2(-c;0)\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng F_2M: $y=\dfrac{y_0(x-c)}{x_0-c}$

F_2M cắt (H) tại N_2: Phương trình hoành độ giao điểm N_2:

$$b^2x^2-a^2\left[\frac{y_0(x-c)}{x_0-c}\right]^2-a^2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[(x_0-c)^2b^2-a^2{y_0}^2\right]x^2+2a^2{y_0}^2cx-a^2b^2(x_0-c)^2=0$$

x_0, x_{N_2} là hai nghiệm của phương trình nên:

$$x_{N_2}+x_0=\frac{-2a^2{y_0}^2c}{\left[(x_0-c)^2b^2-a^2{y_0}^2\right]}$$

$$x_{N_2}+x_0=\frac{-2a^2{y_0}^2c}{\left({x_0}^2-2cx_0+c^2\right)b^2-a^2{y_0}^2}=\frac{-2a^2{y_0}^2c}{\left(b^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2\right)+b^2c^2-2b^2cx_0}$$

$$=\frac{-2a^2{y_0}^2c}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}$$

$$\Rightarrow x_{N_2}=\frac{-2a^2{y_0}^2c}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}-x_0\Rightarrow y_{N_2}=\frac{y_0\left(x_{N_2}-c\right)}{x_0-c}.$$

$\Rightarrow N_1\left(x_{N_1};y_{N_1}\right)$; $N_2\left(x_{N_2};y_{N_2}\right)$. Phương trình đường thẳng N_1N_2:

$$\frac{x-x_{N_1}}{x_{N_2}-x_{N_1}}=\frac{y-y_{N_1}}{y_{N_2}-y_{N_1}}\Leftrightarrow\left(y_{N_2}-y_{N_1}\right)x-\left(x_{N_2}-x_{N1}\right)y=x_{N_1}.y_{N_2}-x_{N_2}.y_{N_1}$$

* Tính riêng:

- $$x_{N_2} - x_{N_1} = \frac{-2a^2{y_0}^2c}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]} - \frac{2a^2{y_0}^2c}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}$$

$$= \frac{-2a^2{y_0}^2c}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2{x_0}^2\right]}\left(a^2+c^2+2cx_0+a^2+c^2-2cx_0\right) = \frac{-4a^2{y_0}^2c\left(a^2+c^2\right)}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2{x_0}^2\right]}$$

- $$x_{N_2} + x_{N_1} = \frac{-2a^2{y_0}^2c}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]} + \frac{2a^2{y_0}^2c}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]} - 2x_0$$

$$= \frac{2a^2{y_0}^2c}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2{x_0}^2\right]}\left(a^2+c^2-2cx_0-a^2-c^2-2cx_0\right)-2x_0$$

$$= \frac{-8a^2{y_0}^2c^2x_0}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2{x_0}^2\right]} - 2x_0 = -2x_0\left[\frac{4a^2{y_0}^2c^2}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2{x_0}^2\right]}+1\right]$$

$$= -2x_0\frac{\left(4a^2{y_0}^2c^2+b^2\left(a^2+c^2\right)^2-4b^2c^2{x_0}^2\right)}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2{x_0}^2\right]} = \frac{-2x_0\left[4c^2\left(a^2{y_0}^2-b^2{x_0}^2\right)+b^2\left(a^2+c^2\right)^2\right]}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2{x_0}^2\right]}$$

$$= \frac{-2x_0\left[4c^2\left(-a^2b^2\right)+b^2\left(a^2+c^2\right)^2\right]}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2{x_0}^2\right]} = \frac{-2b^2x_0\left[-4a^2c^2+\left(a^2+c^2\right)^2\right]}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2{x_0}^2\right]} = \frac{-2x_0\left(a^2-c^2\right)^2}{\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2{x_0}^2\right]}$$

- $$x_{N_1} + c = \frac{2a^2{y_0}^2c}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]} - x_0 + c = \frac{2a^2{y_0}^2c-\left(x_0-c\right)\left[b^2\left(a^2+c^2\right)+2b^2cx_0\right]}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}$$

$$= \frac{2a^2{y_0}^2c-b^2\left(a^2+c^2\right)x_0+b^2\left(a^2+c^2\right)c-2b^2c{x_0}^2+2b^2c^2x_0}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}$$

$$= \frac{2c\left(a^2{y_0}^2-b^2{x_0}^2\right)-a^2b^2x_0-b^2c^2x_0+b^2\left(a^2+c^2\right)c+2b^2c^2x_0}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}$$

$$=\frac{-2a^2b^2c-a^2b^2x_0+b^2c^2x_0+a^2b^2c+b^2c^3}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}=\frac{-a^2b^2c-a^2b^2x_0+b^2c^2x_0+b^2c^3}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}$$

$$=\frac{-a^2b^2\left(c+x_0\right)+b^2c^2\left(c+x_0\right)}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}=\frac{b^2\left(c+x_0\right)\left(c^2-a^2\right)}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}=\frac{b^2\left(c+x_0\right)}{\left(a^2+c^2\right)+2cx_0}.$$

- $$x_{N_2}-c=\frac{-2a^2{y_0}^2c}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}-x_0-c=-\frac{2a^2{y_0}^2c+\left(x_0+c\right)\left[b^2\left(a^2+c^2\right)-2b^2cx_0\right]}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}$$

$$=-\left[\frac{2a^2{y_0}^2c+b^2\left(a^2+c^2\right)x_0-2b^2c{x_0}^2+b^2\left(a^2+c^2\right)c-2b^2c^2x_0}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}\right]$$

$$=\frac{-\left[2c\left(a^2{y_0}^2-b^2{x_0}^2\right)+a^2b^2x_0+b^2c^2x_0+a^2b^2c+b^2c^3-2b^2c^2x_0\right]}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}$$

$$=\frac{-\left(-2a^2b^2c+a^2b^2x_0-b^2c^2x_0+a^2b^2c+b^2c^3\right)}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}=\frac{-b^2\left(-a^2c+a^2x_0-c^2x_0+c^3\right)}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}$$

$$=\frac{a^2\left(x_0-c\right)-c^2\left(x_0-c\right)}{\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}=\frac{\left(x_0-c\right)\left(a^2-c^2\right)}{\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}=\frac{b^2\left(c-x_0\right)}{\left(a^2+c^2\right)-2cx_0}.$$

- $$y_{N_2}-y_{N_1}=\frac{y_0\left(x_{N_2}-c\right)}{x_0-c}-\frac{y_0\left(x_{N_1}+c\right)}{x_0+c}=\frac{y_0}{\left({x_0}^2-c^2\right)}\left[\left(x_{N_2}-c\right)\left(x_0+c\right)-\left(x_{N_1}+c\right)\left(x_0-c\right)\right]$$

$$=\frac{y_0}{{x_0}^2-c^2}\left(x_{N_2}x_0-cx_0+x_{N_2}c-c^2-x_{N_1}x_0-cx_0+x_{N_1}c+c^2\right)$$

$$=\frac{y_0}{{x_0}^2-c^2}\left[x_0\left(x_{N_2}-x_{N_1}\right)+c\left(x_{N_2}+x_{N_1}\right)-2cx_0\right]$$

$$=\frac{y_0}{{x_0}^2-c^2}\left[x_0.\left(\frac{-4a^2{y_0}^2c\left(a^2+c^2\right)}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2{x_0}^2\right]}\right)+c\left(\frac{-2x_0\left(a^2-c^2\right)^2}{\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2{x_0}^2\right]}\right)-2cx_0\right]$$

$$=\frac{-2cx_0y_0}{{x_0}^2-c^2}.\frac{\left[2a^2{y_0}^2\left(2a^2+b^2\right)+b^2\left(a^2-c^2\right)^2+b^2\left(a^2+c^2\right)^2-4b^2c^2{x_0}^2\right]}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2{x_0}^2\right]}$$

$$=\frac{-2cx_0y_0}{x_0{}^2-c^2}.\frac{\left[4a^4y_0{}^2+2a^2b^2y_0{}^2+2b^2\left(a^4+c^4\right)-4b^2\left(a^2+b^2\right)x_0{}^2\right]}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}$$

$$=\frac{-2cx_0y_0}{x_0{}^2-c^2}.\frac{\left[4a^4y_0{}^2+2a^2b^2y_0{}^2+2b^2\left(a^4+c^4\right)-4a^2b^2x_0{}^2-4b^4x_0{}^2\right]}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}$$

$$=\frac{-2cx_0y_0}{x_0{}^2-c^2}.\frac{\left[4a^2\left(a^2y_0{}^2-b^2x_0{}^2\right)+2b^2\left(a^2y_0{}^2-b^2x_0{}^2\right)-2b^4x_0{}^2+2b^2\left(a^4+c^4\right)\right]}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}$$

$$=\frac{-2cx_0y_0}{x_0{}^2-c^2}.\frac{\left(-4a^4b^2-2a^2b^4-2b^4x_0{}^2+2b^2\left(a^4+c^4\right)\right)}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}$$

$$=\frac{-2cx_0y_0}{x_0{}^2-c^2}.\frac{\left(-4a^4b^2-2a^2b^4+2a^4b^2+2b^2c^4-2b^4x_0{}^2\right)}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}$$

$$=\frac{-2cx_0y_0}{x_0{}^2-c^2}.\frac{\left(-2b^2\right)\left(a^4+a^2b^2-c^4+b^2x_0{}^2\right)}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}=\frac{4cx_0y_0}{\left(x_0{}^2-c^2\right)}.\frac{\left[a^2\left(a^2+b^2\right)-c^4+b^2x_0{}^2\right]}{\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}$$

$$=\frac{4cx_0y_0}{\left(x_0{}^2-c^2\right)}.\frac{\left[c^2\left(a^2-c^2\right)+b^2x_0{}^2\right]}{\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}=\frac{4cx_0y_0}{\left(x_0{}^2-c^2\right)}.\frac{\left[-b^2c^2+b^2x_0{}^2\right]}{\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}$$

$$=\frac{4cx_0y_0}{\left(x_0{}^2-c^2\right)}.\frac{b^2\left(x_0{}^2-c^2\right)}{\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}=\frac{4b^2cx_0y_0}{\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}.$$

- $$x_{N_1}.y_{N_2}-x_{N_2}.y_{N_1}=\left(\frac{2a^2y_0{}^2c}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}-x_0\right).\frac{y_0\left(x_{N_2}-c\right)}{\left(x_0-c\right)}-\left(\frac{-2a^2y_0{}^2c}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}-x_0\right).\frac{y_0\left(x_{N_1}+c\right)}{\left(x_0+c\right)}$$

$$=\frac{\left(2a^2y_0{}^2c-b^2\left(a^2+c^2\right)x_0-2b^2cx_0{}^2\right)}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}.\frac{y_0\left(x_{N_2}-c\right)}{\left(x_0-c\right)}+\frac{\left(2a^2y_0{}^2c+b^2\left(a^2+c^2\right)x_0-2b^2cx_0{}^2\right)}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}.\frac{y_0\left(x_{N_1}+c\right)}{\left(x_0+c\right)}$$

$$=\left(\frac{2c\left(a^2y_0{}^2-b^2x_0{}^2\right)-b^2\left(a^2+c^2\right)x_0}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}\right).\frac{y_0\left(x_{N_2}-c\right)}{\left(x_0-c\right)}+\left(\frac{2c\left(a^2y_0{}^2-b^2x_0{}^2\right)+b^2\left(a^2+c^2\right)x_0}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}\right).\frac{y_0\left(x_{N_1}+c\right)}{\left(x_0+c\right)}$$

$$=\left(\frac{b^2\left[-2a^2c-\left(a^2+c^2\right)x_0\right]}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}\right).\frac{y_0\left(x_{N_2}-c\right)}{\left(x_0-c\right)}+\left(\frac{b^2\left[-2a^2c+\left(a^2+c^2\right)x_0\right]}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}\right).\frac{y_0\left(x_{N_1}+c\right)}{\left(x_0+c\right)}$$

$$=\frac{\left[-2a^2c-\left(a^2+c^2\right)x_0\right]}{\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}.\frac{y_0}{\left(x_0-c\right)}.\frac{b^2\left(x_0-c\right)}{\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}+\frac{\left[-2a^2c+\left(a^2+c^2\right)x_0\right]}{\left[\left(a^2+c^2\right)-2cx_0\right]}.\frac{y_0}{\left(x_0+c\right)}.\frac{b^2\left(x_0+c\right)}{\left[\left(a^2+c^2\right)+2cx_0\right]}$$

$$=\frac{b^2y_0\left[-2a^2c-\left(a^2+c^2\right)x_0-2a^2c+\left(a^2+c^2\right)x_0\right]}{\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}=\frac{-4a^2b^2cy_0}{\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}.$$

Phương trình đường thẳng N_1N_2: $\left(y_{N_2}-y_{N_1}\right)x-\left(x_{N_2}-x_{N_1}\right)y=x_{N_1}y_{N_2}-x_{N_2}y_{N_1}$.

Thay $\left(y_{N_2}-y_{N_1}\right)$, $\left(x_{N_2}-x_{N_1}\right)$; $\left(x_{N_1}y_{N_2}-x_{N_2}y_{N_1}\right)$ bằng các biểu thức đã tính và rút gọn ở trên được phương trình đường thẳng N_1N_2:

$$\left(\frac{4b^2cx_0y_0}{\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}\right).x+\left(\frac{4a^2y_0{}^2c\left(a^2+c^2\right)}{b^2\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}\right).y=\frac{-4a^2b^2cy_0}{\left[\left(a^2+c^2\right)^2-4c^2x_0{}^2\right]}$$

$$\Leftrightarrow\ b^4x_0x+a^2\left(a^2+c^2\right)y_0y=-a^2b^4$$

Nhận xét: $\left(b^4x_0\right)^2.a^2-a^4\left(a^2+c^2\right)^2.y_0{}^2.\dfrac{b^6}{\left(a^2+c^2\right)^2}$

$$=b^8a^2x_0{}^2-a^4b^6y_0{}^2=a^4b^8\left(\frac{x_0{}^2}{a^2}-\frac{y_0{}^2}{b^2}\right)=a^4.b^8$$

$\Rightarrow$ Hyperbol $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{b^3}{a^2+c^2}\right)}=1$ là một hyperbol cố định, tiếp xúc với đường thẳng N_1N_2.

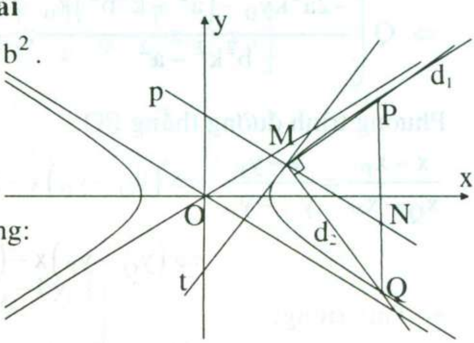
◆ Lời bình: Trong những kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh, thành phố, hoặc cả nước, rất có thể hội đồng tuyển chọn đề thi sẽ chọn những bài tập theo kiểu này!

Bài 307. Cho hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \left(a^2\neq b^2\right)$.

a. Cố định $M(x_0;\ y_0)\in(H)$. Vẽ hai dây tùy ý MP, MQ của (H) vuông góc với nhau. Chứng minh đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định N nằm trên pháp tuyến của (H) tại M.

b. Tìm quỹ tích của N khi M di động trên (H).

Giải



a. $M(x_0;\ y_0)\in(H)\Leftrightarrow b^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2=a^2b^2$.

Phương trình tiếp tuyến t tại M:

$$\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1$$

Phương trình tiếp tuyến p tại M có dạng:

$$\frac{y_0}{b^2}x+\frac{x_0}{a^2}y+C=0$$

p qua $M(x_0;\ y_0)\Leftrightarrow C=\dfrac{-x_0y_0}{a^2b^2}c^2$.

$\Rightarrow$ Phương trình pháp tuyến p:

$$\frac{y_0}{b^2}x+\frac{x_0}{a^2}y-\frac{x_0y_0c^2}{a^2b^2}=0\Leftrightarrow\frac{x}{b^2x_0}+\frac{y}{a^2y_0}-\frac{c^2}{a^2b^2}=0.$$

- Gọi d_1 là đường thẳng qua M, có hệ số góc k: $y=kx-kx_0+y_0$

  Phương trình hoành độ giao điểm P của d_1 và (H):

$$b^2x^2-a^2\left(kx-kx_0+y_0\right)^2-a^2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ b^2x^2-a^2\left(k^2x^2+k^2{x_0}^2+{y_0}^2-2k^2x_0x+2ky_0x-2kx_0y_0\right)-a^2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(b^2-a^2k^2\right)x^2+2a^2k\left(kx_0-y_0\right)x-a^2k^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2+2a^2kx_0y_0-a^2b^2=0$$

Phương trình có một nghiệm là $x=x_0$ và $x_P+x_0=\dfrac{-2a^2\left(kx_0-y_0\right)k}{b^2-a^2k^2}$

$$\Leftrightarrow x_P=\frac{-2a^2k\left(kx_0-y_0\right)}{b^2-a^2k^2}-x_0\Leftrightarrow x_P=\frac{2a^2y_0k-\left(a^2k^2+b^2\right)x_0}{b^2-a^2k^2}$$

$$\Rightarrow y_P=kx_P-kx_0+y_0\Rightarrow P\left(\frac{2a^2y_0k-\left(a^2k^2+b^2\right)x_0}{b^2-a^2k^2};\ kx_P-kx_0+y_0\right)$$

Thay k bởi $-\dfrac{1}{k}$: $\left(k\neq0\right)$

$$x_Q = \frac{2a^2\left(-\frac{1}{k}\right)y_0\left(a^2\frac{1}{k^2}+b^2\right)x_0}{b^2-\frac{a^2}{k^2}} = \frac{-2a^2ky_0-\left(a^2+k^2b^2\right)x_0}{b^2k^2-a^2}$$

$$\Rightarrow y_Q = -\frac{1}{k}x_Q + \frac{1}{k}x_0 + y_0.$$

$$\Rightarrow Q\left(\frac{-2a^2ky_0-\left(a^2+k^2b^2\right)x_0}{b^2k^2-a^2}; -\frac{1}{k}x_Q+\frac{1}{k}x_0+y_0\right)$$

Phương trình đường thẳng PQ:

$$\frac{x-x_P}{x_Q-x_P} = \frac{y-y_P}{y_Q-y_P} \Leftrightarrow \left(y_Q-y_P\right)x - x_Py_Q + x_Py_P = \left(x_Q-x_P\right)y - x_Qy_P + x_Py_P$$

$$\Leftrightarrow \left(y_Q-y_P\right)x-\left(x_Q-x_P\right)y = x_Py_Q - x_Qy_P.$$

* Tính riêng:

- $$x_Q - x_P = \frac{-2a^2ky_0-\left(a^2+k^2b^2\right)x_0}{b^2k^2-a^2} - \frac{-2a^2ky_0-\left(a^2k^2+b^2\right)x_0}{b^2-a^2k^2}$$

$$= \frac{-\left[2a^2ky_0+\left(a^2+k^2b^2\right)x_0\right]\left(b^2-a^2k^2\right)-\left[2a^2ky_0-\left(a^2k^2+b^2\right)x_0\right]\left(b^2k^2-a^2\right)}{\left(b^2k^2-a^2\right)\left(b^2-a^2k^2\right)}$$

$$= \frac{-2a^2\left(1+k^2\right)\left[\left(b^2-a^2\right)ky_0+\left(1-k^2\right)b^2x_0\right]}{\left(b^2k^2-a^2\right)\left(b^2-a^2k^2\right)}$$

- $$y_Q - y_P = -\frac{1}{k}x_Q - kx_P + \frac{1}{k}x_0 + kx_0 = -\frac{1}{k}\left(x_Q-x_0\right)-k\left(x_P-x_0\right)$$

$$= -\frac{1}{k}\left[\frac{-2a^2ky_0-\left(a^2+k^2b^2\right)x_0}{b^2k^2-a^2}-x_0\right]-k\left[\frac{-2a^2ky_0-\left(a^2k^2+b^2\right)x_0}{b^2-a^2k^2}-x_0\right]$$

$$= \frac{1}{k}\left[\frac{2a^2ky_0+\left(a^2+k^2b^2\right)x_0+b^2k^2x_0-a^2x_0}{b^2k^2-a^2}\right]-\frac{k\left[2a^2ky_0-\left(a^2k^2+b^2\right)x_0-b^2x_0+a^2k^2x_0\right]}{b^2-a^2k^2}$$

$$= \frac{2a^2y_0+2b^2kx_0}{b^2k^2-a^2}-\frac{2a^2k^2y_0-2b^2kx_0}{b^2-a^2k^2}$$

$$=\frac{2\left(a^2y_0+b^2kx_0\right)\left(b^2-a^2k^2\right)-\left(a^2k^2y_0-b^2kx_0\right)\left(b^2k^2-a^2\right)}{\left(b^2k^2-a^2\right)\left(b^2-a^2k^2\right)}$$

$$=\frac{2\left(1+k^2\right)b^2\left[a^2y_0\left(1-k^2\right)+\left(b^2-a^2\right)kx_0\right]}{\left(b^2k^2-a^2\right)\left(b^2-a^2k^2\right)}.$$

- $$x_Py_Q-x_Qy_P=\left[\frac{2a^2ky_0-\left(a^2k^2+b^2\right)x_0}{b^2-a^2k^2}\right]\left[-\frac{1}{k}x_Q+\frac{1}{k}x_0+y_0\right]+\left[\frac{2a^2ky_0-\left(a^2+b^2k^2\right)x_0}{b^2k^2-a^2}\right]\left[kx_P-kx_0+y_0\right]$$

$$=-\frac{1}{k}\left[\left(\frac{2a^2ky_0-\left(a^2k^2+b^2\right)x_0}{b^2-a^2k^2}\right)\left(x_Q-x_0-ky_0\right)\right]+\left[\frac{2a^2ky_0-\left(a^2+b^2k^2\right)x_0}{b^2k^2-a^2}\right]\left[k\left(\frac{2a^2ky_0-\left(b^2+a^2k^2\right)x_0}{b^2-a^2k^2}\right)-\left(kx_0-y_0\right)\right]$$

$$=\frac{1}{k}\left[\left(\frac{2a^2ky_0-\left(a^2k^2+b^2\right)x_0}{b^2-a^2k^2}\right)\left(\frac{2a^2ky_0+\left(a^2+b^2k^2\right)x_0+\left(b^2k^2-a^2\right)\left(x_0+ky_0\right)}{b^2k^2-a^2}\right)\right]+\left[\left(\frac{2a^2ky_0+\left(a^2+b^2k^2\right)x_0}{b^2k^2-a^2}\right)\left(\frac{\left(2a^2k^2y_0-\left(b^2+a^2k^2\right)kx_0\right)-\left(b^2-a^2k^2\right)\left(kx_0-y_0\right)}{b^2-a^2k^2}\right)\right]$$

$$=\frac{2k\left(1+k^2\right)\left(a^4y_0{}^2-b^2c^2x_0{}^2+a^2b^2y_0{}^2\right)}{\left(b^2-a^2k^2\right)\left(b^2k^2-a^2\right)}=\frac{2k\left(1+k^2\right)\left[a^2\left(a^2+b^2\right)y_0{}^2-b^2c^2x_0{}^2\right]}{\left(b^2-a^2k^2\right)\left(b^2k^2-a^2\right)}$$

$$=\frac{2k\left(1+k^2\right)\left(c^2\left(a^2y_0{}^2-b^2x_0{}^2\right)\right)}{\left(b^2-a^2k^2\right)\left(b^2k^2-a^2\right)}=\frac{-2k\left(1+k^2\right)\left(a^2b^2c^2\right)}{\left(b^2-a^2k^2\right)\left(b^2k^2-a^2\right)}$$

Phương trình đường thẳng PQ: $\left(y_Q-y_P\right)x-\left(x_Q-x_P\right)y=x_P.y_Q-x_Q.y_P$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left(1+k^2\right)b^2\left[a^2y_0\left(1-k^2\right)+\left(b^2-a^2\right)kx_0\right]}{\left(b^2k^2-a^2\right)\left(b^2-a^2k^2\right)}x+\frac{2a^2\left(1+k^2\right)\left[\left(b^2-a^2\right)ky_0+\left(1-k^2\right)b^2x_0\right]}{\left(b^2k^2-a^2\right)\left(b^2-a^2k^2\right)}$$

$$=\frac{-2k\left(1+k^2\right)a^2b^2c^2}{\left(b^2-a^2k^2\right)\left(b^2k^2-a^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow b^2\left[a^2y_0\left(1-k^2\right)+\left(b^2-a^2\right)kx_0\right]x+a^2\left[\left(b^2-a^2\right)ky_0+\left(1-k^2\right)b^2x_0\right]y=-ka^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2\left(y_0x+x_0y\right)\left(1-k^2\right)+k\left[\left(b^2-a^2\right)x_0\left(a^2y+b^2x\right)+a^2b^2c^2\right]=0 \qquad (*)$$

(∗) thỏa ∀k (k ≠ 0) $\Leftrightarrow \begin{cases} y_0x+x_0y=0 \\ \left(b^2-a^2\right)x_0\left(a^2y+b^2x\right)+a^2b^2c^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c^2x_0}{a^2-b^2} \\ y=\dfrac{-c^2y_0}{a^2-b^2} \end{cases}$

Vậy $N\left(\dfrac{c^2x_0}{a^2-b^2};\dfrac{-c^2y_0}{a^2-b^2}\right)$. Điểm N ∈ pháp tuyến p ⇒ đpcm.

b. Nếu M(x₀; y₀) ∈ (H) thay đổi:

$$\begin{cases} x=\dfrac{c^2x_0}{a^2-b^2} \\ y=\dfrac{-c^2y_0}{a^2-b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{c^4{x_0}^2}{\left(a^2-b^2\right)^2}.\dfrac{b^2}{b^2} \\ y^2=\dfrac{c^4{y_0}^2}{\left(a^2-b^2\right)}.\dfrac{a^2}{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\dfrac{x^2}{c^4}}{b^2\left(a^2-b^2\right)^2}=b^2{x_0}^2 \\ \dfrac{\dfrac{y^2}{c^4}}{a^2\left(a^2-b^2\right)^2}=a^2{y_0}^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{c^2}{b\left(a^2-b^2\right)}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{c^2}{a\left(a^2-b^2\right)}\right)^2}=1$ là phương trình quỹ tích điểm N.

Chương VI. **PARABOL**

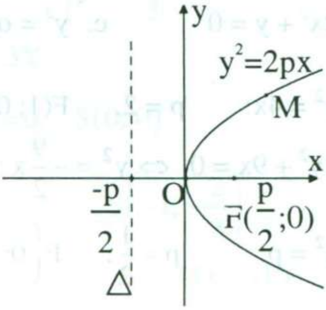
A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

- **Định nghĩa:** Parabol (P)

  $(P) = \left\{M(x;y) / FM = d(M,\Delta)\right\}$

  $F\left(\frac{p}{2};0\right)$: tiêu điểm, p: tham số tiêu

  $\Delta: x + \frac{p}{2} = 0$: đường chuẩn $(p > 0)$



- **Phương trình chính tắc**: $y^2 = 2px$

  $FM = x + \frac{p}{2}$: bán kính qua tiêu

- **Các dạng biến điệu khác**:

  $y^2 = -2px$: Tiêu điểm $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$.

  Đường chuẩn: $x - \frac{p}{2} = 0$

  Bán kính qua tiêu $FM = -x + \frac{p}{2}$. $\left(M \in (P)\right)$

  $x^2 = 2py$: Tiêu điểm $F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$

  Đường chuẩn: $y + \frac{p}{2} = 0$

  Bán kính qua tiêu $FM = y + \frac{p}{2} = 0$ $\left(M \in (P)\right)$

  $x^2 = -2py$: Tiêu điểm $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$

  Đường chuẩn: $y - \frac{p}{2} = 0$

  Bán kính qua tiêu $FM = -y + \frac{p}{2} = 0$ $\left(M \in (P)\right)$.

- Nếu điểm $M(x_0;y_0) \in (P)$: phương trình tiếp tuyến của (P) tại M: $y_0y = p(x + x_0)$.
- Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ: $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc (P): $y^2 = 2px$ là: $B^2p = 2AC$.

B. ĐỀ TOÁN VÀ LỜI GIẢI

Bài 308. Xác định tham số tiêu, tọa độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của các parabol:

a. $y^2 - 4x = 0$ b. $2y^2 + 9x = 0$ c. $y = x^2$

d. $2x^2 + y = 0$ e. $y^2 = \alpha x\ (\alpha \neq 0)$ f. $x^2 = \alpha y\ (\alpha \neq 0)$.

Giải

a. $y^2 = 4x$: $p = 2$, $F(1; 0)$, $x + 1 = 0$.

b. $2y^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow y^2 = -\frac{9}{2}x$: $p = \frac{9}{4}$, $F\left(-\frac{9}{8}; 0\right)$, $x - \frac{9}{8} = 0$.

c. $x^2 = p$: $p = \frac{1}{2}$, $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, $y + \frac{1}{4} = 0$.

d. $2x^2 + y = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2}y$: $p = \frac{1}{4}$, $F\left(\frac{1}{8}; 0\right)$, $y + \frac{1}{8} = 0$.

e. $y^2 = \alpha x$: $p = \frac{\alpha}{2}$, $F\left(\frac{\alpha}{4}; 0\right)$, $x + \frac{\alpha}{4} = 0$.

f. $x^2 = \alpha y$: $p = \frac{\alpha}{2}$, $F\left(0; \frac{\alpha}{4}\right)$, $y + \frac{\alpha}{4} = 0$.

Bài 309. Xác định tham số tiêu, tọa độ đỉnh, tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của các parabol:

a. $(y - 1)^2 = 8(x + 2)$ b. $y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$

c. $x^2 + 2x - 3y - 1 = 0$ d. $y = 2 + 6x - x^2$

e. $y = ax^2 + bx + c\ \ (a \neq 0)$ f. $x = ay^2 + by + c\ \ (a \neq 0)$.

Giải

a. $(y - 1)^2 = 8(x + 2)$

Tịnh tiến hệ trục (Oxy) theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (-2; 1)$: $\begin{cases} x = -2 + X \\ y = 1 + Y \end{cases}$

Trong hệ IXY, parabol $(y - 1)^2 = 8\ (x + 2)$ có phương trình: $Y^2 = 8X$

$p = 4$, $F(2; 0)$, $X + 2 = 0$, đỉnh $S(0; 0)$

Đưa về hệ Oxy: $p = 4$, $F(0; 1)$, $x + 4 = 0$, đỉnh $S(-2; 1)$.

b. $y^2 + 4x + 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 = -4x + 12 \Leftrightarrow (y + 2)^2 = -4(x - 3)$ (P)

Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (3; -2)$: $\begin{cases} x = 3 + X \\ y = -2 + Y \end{cases}$

Trong hệ trục IXY, (P) có phương trình: $Y^2 = -4X$

$p = 2$, $F(-1; 0)$, $X - 1 = 0$, $S(0; 0)$

Đưa về hệ Oxy: $p = 2$, $F(2; -2)$, $x - 4 = 0$, $S(3; -2)$.

c. $x^2 + 2x - 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 3y + 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 3\left(y + \frac{2}{3}\right)$ (P)

Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = \left(-1; -\frac{2}{3}\right)$: $\begin{cases} x = -1 + X \\ y = -\frac{2}{3} + Y \end{cases}$

Trong hệ trục IXY, (P) có phương trình: $X^2 = 3Y$.

$$p = \frac{3}{2},\quad F\left(0; \frac{3}{4}\right),\quad Y + \frac{3}{4} = 0,\quad S(0; 0)$$

Đưa về hệ Oxy: $p = \frac{3}{2}$, $F\left(-1; \frac{1}{12}\right)$, $y + \frac{17}{12} = 0$, $S\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$.

d. $y = 2 + 6x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = -y + 11 \Leftrightarrow (x-3)^2 = -(y-11)$ (P)

Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (3; 11)$: $\begin{cases} x = 3 + X \\ y = 11 + Y \end{cases}$

Trong hệ trục IXY, (P) có phương trình: $X^2 = -Y$.

$$p = \frac{1}{2},\quad F\left(0; -\frac{1}{4}\right),\quad Y - \frac{1}{4} = 0,\quad S(0; 0)$$

Đưa về hệ trục Oxy: $p = \frac{1}{2}$, $F\left(3; \frac{45}{4}\right)$, $y - \frac{45}{4} = 0$, $S(3; 11)$.

e. $y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ (P)

$$\Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = y + \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{\Delta}{4a}\right).$$

Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$: $\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} + X \\ y = -\frac{\Delta}{4a} + Y \end{cases}$

Trong hệ trục IXY, (P) có phương trình: $X^2 = \frac{1}{a}Y$

$$p = \frac{1}{2|a|},\quad F\left(0; \frac{1}{4a}\right),\quad Y + \frac{1}{4a} = 0,\quad S(0; 0)$$

Trong hệ Oxy: $p = \frac{1}{2|a|}$, $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$, $y + \frac{1+\Delta}{4a} = 0$, $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

f. $x = ay^2 + by + c = a\left[\left(y + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(y + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$

$$\Leftrightarrow a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 = x + \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow \left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(x + \frac{\Delta}{4a}\right) \quad (P)$$

Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = \left(-\dfrac{\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$: $\begin{cases} x = -\dfrac{\Delta}{4a} + X \\ y = -\dfrac{b}{2a} + Y \end{cases}$

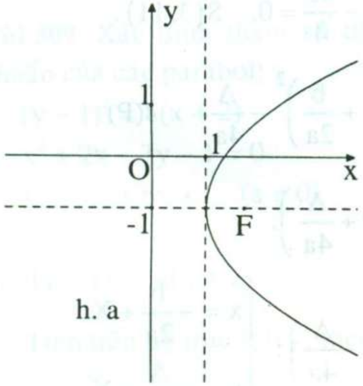
Trong hệ trục IXY, (P) có phương trình: $Y^2 = \dfrac{1}{a}X$.

$p = \dfrac{1}{2|a|}$, $F\left(\dfrac{1}{4a}; 0\right)$, $X + \dfrac{1}{4a} = 0$, $S(0; 0)$

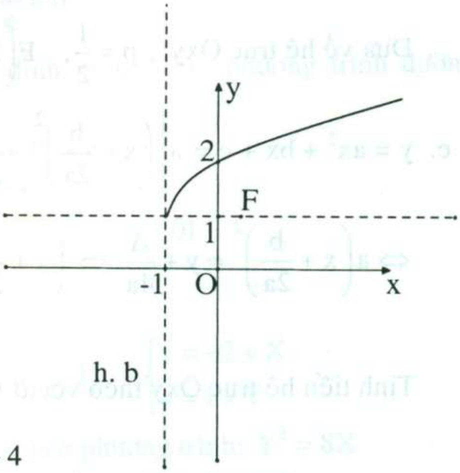
Trong hệ Oxy: $p = \dfrac{1}{2|a|}$, $F\left(\dfrac{1-\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$, $x + \dfrac{1+\Delta}{4a} = 0$, $S\left(-\dfrac{\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$.

Bài 310. Vẽ các đường cong: a. $y^2 + 2y - 4x + 5 = 0$; b. $y = 1 + \sqrt{1 + x}$.

Giải



h. a



h. b

a. $y^2 + 2y - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = 4x - 4$

$\Leftrightarrow (y + 1)^2 = 4(x - 1)$

b. $y = 1 + \sqrt{1 + x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 1 \\ (y - 1)^2 = (x + 1) \end{cases}$

Bài 311. Trong mặt phẳng Oxy, lập phương trình của parabol (P):

a. Đỉnh O, Ox là trục, khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là 2.

b. Tiêu điểm F(0; –1), qua O và nhận Oy là trục.

c. Đỉnh O, qua A(−1; 1), Oy là trục.

d. Qua O và A($2; -2\sqrt{2}$), Ox là trục.

e. Đỉnh O, đường chuẩn $2x - 7 = 0$.

f. Tiêu điểm F($0; -\sqrt{3}$), đường chuẩn $\sqrt{3}\,y - 3 = 0$.

g. Đỉnh O, trục Ox, một dây cung của parabol này vuông góc với trục Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ dây cung đó đến đỉnh bằng 1.

Giải

a. Phương trình (P) có dạng $y^2 = 2px$.

Khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là $2 \Leftrightarrow p = 2$.

Phương trình (P): $y^2 = 4x$ hoặc $y^2 = -4x$.

b. Dạng của (P): $x^2 = -2py$. $\frac{|p|}{2} = -1 \Rightarrow |p| = 2$

Phương trình (P): $x^2 = -4y$.

c. Phương trình (P) có dạng: $x^2 = 2py$.

(P) qua A(−1; 1) $\Leftrightarrow (-1)^2 = 2p.1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Phương trình (P): $x^2 = y$.

d. Phương trình (P) có dạng: $y^2 = 2px$.

(P) qua A($2; -2\sqrt{2}$) $\Leftrightarrow \left(-2\sqrt{2}\right)^2 = 2p.2 \Leftrightarrow p = 2 \Rightarrow$ Phương trình (P): $y^2 = 4x$

e. Phương trình (P) có dạng: $y^2 = -2px$

Đường chuẩn $2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{p}{2} = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow p = 7$.

$\Rightarrow$ Phương trình (P): $y^2 = -14x$.

f. Phương trình (P) có dạng: $x^2 = -2py$.

Đường chuẩn $\sqrt{3}y - 3 = 0 \Leftrightarrow y - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow = -\frac{p}{2} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow p = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ Phương trình (P): $x^2 = -4\sqrt{3}y$.

g. Phương trình (P) có dạng: $y^2 = 2px$.

Giả thiết cho biết điểm A(1; 4) $\in$ (P) $\Leftrightarrow 16 = 2p.1 \Leftrightarrow p = 8$.

$\Rightarrow$ Phương trình (P): $y^2 = 16x$ hoặc $y^2 = -16x$.

Bài 312. Trong mặt phẳng Oxy, lập phương trình của parabol (P) có:

a. Đỉnh S(−1; 1), tiêu điểm F(2; 1).

b. Tiêu điểm F(2; −4), đường chuẩn Δ: $y - 4 = 0$.

c. Đỉnh S(−1; 2), đường chuẩn Oy.

d. Đỉnh S(1; −2), qua O và trục đối xứng song song với một trục tọa độ.

e. Trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$, đỉnh parabol thuộc đường thẳng $y + 1 = 0$ và parabol chắn trên đường thẳng $y = x - 2$ một đoạn có độ dài $4\sqrt{2}$.

f. Trục Ox, parabol chắn trên trục tung một đoạn bằng 2b và khoảng cách từ đỉnh parabol đến góc tọa độ bằng a.

g. Đỉnh S ở trên đường thẳng $x - 1 = 0$, trục đối xứng song song với Ox và parabol qua hai điểm $A(2; -3)$, $B(5; 3)$.

Giải

a. Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OS} = (-1; 1)$: $\begin{cases} x = -1 + X \\ y = 1 + Y \end{cases}$

Trong hệ trục SXY, parabol (P) có $\dfrac{p}{2} = SF = 3 \Rightarrow p = 6$, phương trình (P) có dạng $Y^2 = 12X$, đưa về hệ Oxy: $(y - 1)^2 = 12(x + 1)$.

b. Gọi $I(2; 0)$. Tịnh tiến hệ Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (2; 0)$: $\begin{cases} x = 2 + X \\ y = Y \end{cases}$

(P) có tham số tiêu = 2IF = 8. Trong hệ trục IXY, (P) có phương trình $X^2 = -16Y$. Đưa về hệ Oxy: $(x - 2)^2 = -16y$.

c. Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OS} = (-1; 2)$. Giả thiết cho biết $\dfrac{p}{2} =$ $d(S, Oy) = 1 \Leftrightarrow p = 2$. Trong hệ trục SXY, (P) có phương trình $Y^2 = -4X$. Đưa về hệ Oxy: $(y - 2)^2 = -4(x + 1)^2$.

d. Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OS} = (1; -2)$: $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = -2 + Y \end{cases}$

- Nếu trục đối xứng của (P) // Ox, phương trình (P) có dạng: $Y^2 = -2pX$. Trong hệ SXY, tọa độ $O(-1; 2)$. (P) qua O: $2^2 = -2p(-1) \Leftrightarrow p = 2$: phương trình (P): $Y^2 = -4X$. Đưa về hệ Oxy: $(y + 2)^2 = -4(x - 1)$.
- Nếu trục đối xứng của (P) // Oy, phương trình (P) có dạng: $X^2 = 2pY$.

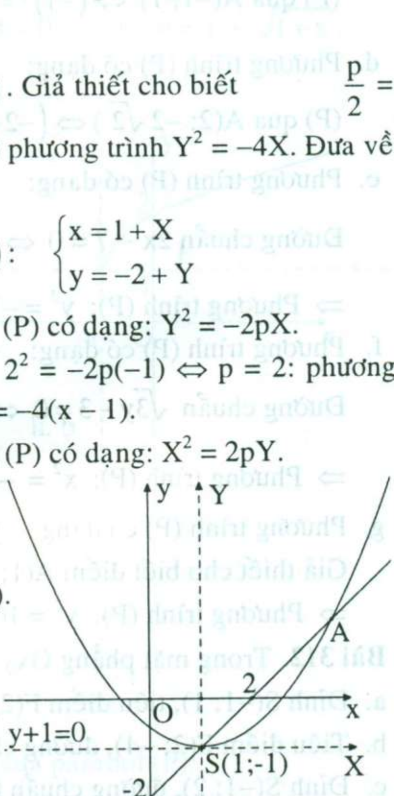
  (P) qua $O(-1; 2) \Leftrightarrow (-1)^2 = 2p.2 \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{4}$.

  $X^2 = \dfrac{1}{2}Y$ đưa về hệ Oxy: $(x - 1)^2 = \dfrac{1}{2}(y + 2)$.

e. Từ các giả thiết $\Rightarrow$ (P) có đỉnh $S(1; -1)$.

Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OS} = (1; -1)$:

$$\begin{cases} x = 1 + X \\ y = -1 + Y \end{cases}$$



Trong hệ trục SXY, phương trình (P) có dạng:

$$Y^2 = \pm 2pX.$$

Trong hệ SXY, đường thẳng: $y = x - 2$ có phương trình $Y = X$.

Đường thẳng $Y = X$ cắt (P) tại $S(0; 0)$ và $A(2p; 2p)$ theo giả thiết $SA = 4\sqrt{2}$

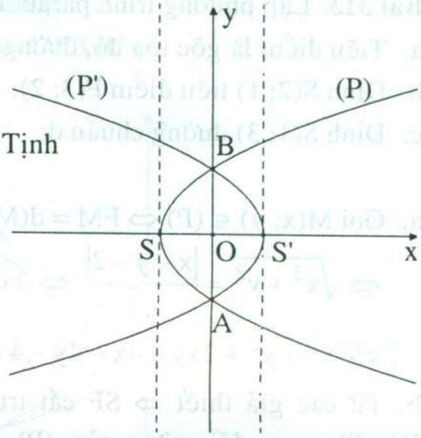
$\Leftrightarrow \sqrt{(2p)^2 + (2p)^2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}p = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow p = 2$

$\Rightarrow$ Phương trình (P): $Y^2 = \pm 4X$

Đưa về hệ Oxy: $(y + 1)^2 = \pm 4(x - 1)$.

f. Có hai trường hợp:

1) (P) có đỉnh $S(-a; 0)$, cắt Oy tại $B(0; b)$. Tịnh tiến hệ Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OS} = (-a; 0)$:



$$\begin{cases} x = -a + X \\ y = Y \end{cases}$$

Trong hệ SXY, (P) có phương trình :

$Y^2 = 2pX$. (P) qua $B(a; b)$

$\Leftrightarrow b^2 = 2pa \Leftrightarrow 2p = \dfrac{b^2}{a}$.

Phương trình (P): $Y^2 = \dfrac{b^2}{a}X$. Đưa về hệ Oxy: $y^2 = \dfrac{b^2}{a}(x + a)$.

2) (P') có đỉnh $S'(a; 0)$, cắt Oy tại $B(0; b)$.

Tịnh tiến hệ Oxy theo $\overrightarrow{OS} = (a; b)$: $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$

Trong hệ S'XY, (P') có phương trình $Y^2 = -2pX$, qua $B(-a; b)$:

$\Leftrightarrow b^2 = -2p(-a) \Leftrightarrow 2p = \dfrac{b^2}{a}$

$\Rightarrow$ Phương trình (P'): $Y^2 = -\dfrac{b^2}{a}X$ đưa về hệ Oxy: $y^2 = -\dfrac{b^2}{a}(x - a)$.

g. Tọa độ $S(1; s)$. Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OS} = (1; s) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + X \\ y = s + Y \end{cases}$

Trong hệ trục SXY: $A(1; -3 - s)$; $B(4; 3 - s)$.

Phương trình (P) có dạng: $Y^2 = 2pX$

(P) qua A
(P) qua B $\Leftrightarrow \begin{cases} (-3 - s)^2 = 2p \\ (3 - s)^2 = 8p \end{cases} \Leftrightarrow (3 - s)^2 = 4(-3 - s)^2 \Leftrightarrow 3s^2 + 30s + 27 = 0$

$$\Leftrightarrow s^2+10s+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} s=-1 \Rightarrow p=2 \\ s=-9 \Rightarrow p=18. \end{array}\right.$$

Có hai parabol thỏa yêu cầu bài toán:

(P): $Y^2 = 4X$, đưa về hệ Oxy: $(y+1)^2 = 4(x-1)$

(P'): $Y^2 = 36X$, đưa về hệ Oxy: $(y+9)^2 = 36(x-1)$.

Bài 313. Lập phương trình parabol (P) có:

a. Tiêu điểm là gốc tọa độ, đường chuẩn Δ: $x - y - 2 = 0$.

b. Đỉnh S(2; 1) tiêu điểm F(3; 2).

c. Đỉnh S(1; 3) đường chuẩn d: $x - 2y = 0$.

Giải

a. Gọi $M(x; y) \in (P) \Leftrightarrow FM = d(M, \Delta)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2x^2+2y^2 = x^2+y^2+4-2xy-4x+4y$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy+4x-4y-4=0.$$

b. Từ các giả thiết ⇒ SF cắt trục Ox tại I(1; 0): trục đối xứng của (P) là đường thẳng FS ⇒ đường chuẩn (Δ) của (P) vuông góc với FS: phương trình (Δ) có dạng:

$x + y + C = 0$, (Δ) qua I $\Leftrightarrow C = -1$.

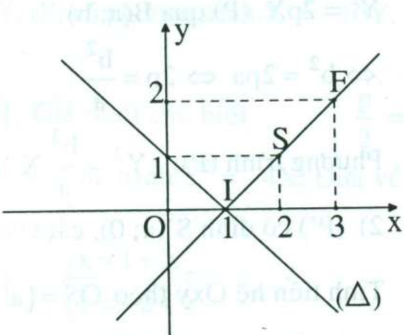
Đường chuẩn (Δ) của (P): $x + y - 1 = 0$.

Gọi $M(x; y) \in (P) \Leftrightarrow FM = d(M, (\Delta))$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-12x+18+2y^2-8y+8 = x^2+y^2+1+2xy-2x-2y$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy-10x-6y+25=0.$$



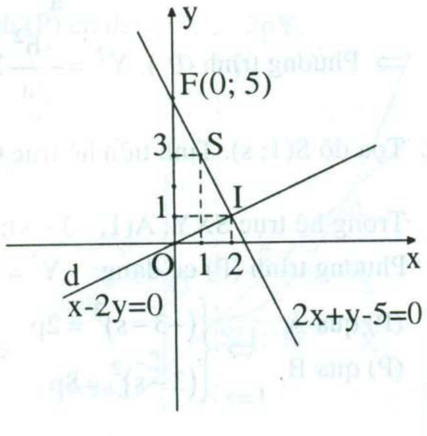
c. Trục của (P) là đường thẳng qua đỉnh S(1; 3) và vuông góc với đường chuẩn d:

$x - 2y = 0$.

Phương trình trục của (P) có dạng $2x + y + C = 0$ qua S $\Leftrightarrow C = -5$. Trục của (P) cắt đường chuẩn d của (P) tại I(1; 2)

⇒ F(0; 5) là tiêu điểm của (P).

Nếu $M(x; y) \in (P) \Leftrightarrow FM = d(M, d)$



$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-5)^2}=\frac{|x-2y|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5x^2+5y^2-50y+125=x^2-4xy+4y^2$$

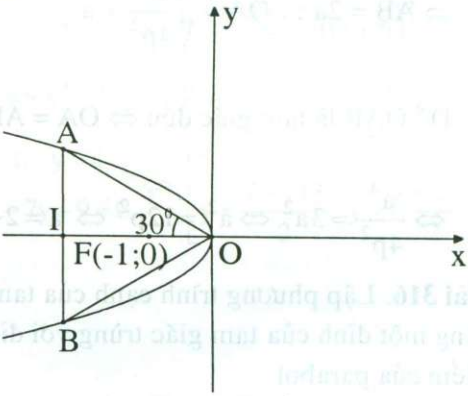
$$\Leftrightarrow 4x^2+y^2+4xy-50y+125=0.$$

Bài 314. Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y^2=-4x$

a. Tìm điểm M trên (P) có bán kính qua tiêu điểm bằng 10 và tung độ dương. Tìm điểm N trên (P) sao cho tam giác OMN vuông tại O.

b. Tìm hai điểm A, B trên (P) sao cho tam giác OAB đều.

Giải



a. Gọi $M\left(-\frac{m^2}{4};m\right)\in(P)$

$FM=1+\frac{m^2}{4}=10 \Leftrightarrow m^2=36$

$\Leftrightarrow m=6$ (loại $m=-6$ theo ycbt)

$\Rightarrow M(-9;6)$.

Gọi $N\left(-\frac{n^2}{4};n\right)\in(P)\ \ (n\neq 0)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM}=(-9;6)\\ \overrightarrow{ON}=\left(-\frac{n^2}{4};n\right)\end{array}\right\}\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=0 \Leftrightarrow \frac{9n^2}{4}+6n=0 \Leftrightarrow n=-\frac{8}{3} \Rightarrow N\left(-\frac{16}{9};-\frac{8}{3}\right).$$

b. Gọi $A\left(-\frac{a^2}{4};a\right)\Rightarrow I\left(-\frac{a^2}{4};0\right)$. $(a\neq 0)$

$$OA=\sqrt{\left(-\frac{a^2}{4}\right)^2+a^2}\ ;\ OI=\frac{a^2}{4}.$$

OAB là tam giác đều $\Leftrightarrow OI=OA.\cos 30^0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(-\frac{a^2}{4}\right)^2+a^2}$

$$\Leftrightarrow a^2=2\sqrt{3}\sqrt{\left(-\frac{a^2}{4}\right)^2+a^2} \Leftrightarrow a^4=\frac{3a^4}{4}+12a^2 \Leftrightarrow a^4=48a^2 \Leftrightarrow a=\pm 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow A\left(-12;4\sqrt{3}\right);\ B\left(-12;-4\sqrt{3}\right).$$

Bài 315. Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y^2=2px\ (p>0)$

a. Đường thẳng qua tiêu điểm F của (P) và vuông góc với Ox cắt (P) tại M, N.

Tính độ dài đoạn MN.

b. Tìm hai điểm A, B trên (P) sao cho OAB là tam giác đều.

Giải

a. $x_M = x_F = \frac{p}{2}$. $FM = x_M + \frac{p}{2} = p \Rightarrow MN = 2p$.

b. Gọi $A\left(\frac{a^2}{2p}; a\right) \Rightarrow B\left(\frac{a^2}{2p}; -a\right)$ do A, B đối xứng nhau qua trục Ox

$$\Rightarrow AB = 2a\ ;\quad OA = \sqrt{\frac{a^4}{4p^2} + a^2}$$

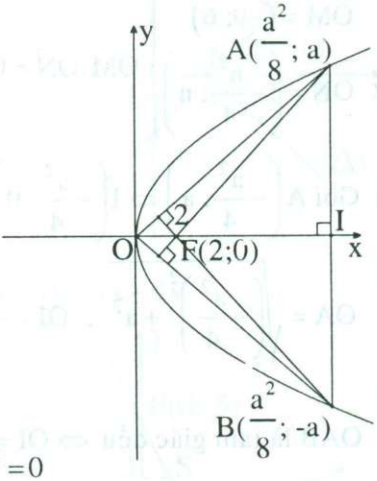
Để OAB là tam giác đều $\Leftrightarrow OA = AB \Leftrightarrow 2a = \sqrt{\frac{a^4}{4p^2} + a^2} \Leftrightarrow 4a^2 = \frac{a^4}{4p^2} + a^2$

$$\Leftrightarrow \frac{a^4}{4p^2} = 3a^2 \Leftrightarrow a^2 = 12p^2 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}p \Rightarrow A\left(6p; 2\sqrt{3}p\right),\ B\left(6p; -2\sqrt{3}p\right).$$

Bài 316. Lập phương trình cạnh của tam giác nội tiếp trong parabol $y^2 = 8x$, biết rằng một đỉnh của tam giác trùng với đỉnh của parabol và trực tâm trùng với tiêu điểm của parabol.

Giải

Giả sử tam giác OAB nội tiếp parabol $y^2 = 8x$, F(2; 0). Vì tam giác có một đỉnh là O ⇒ OF ⊥ AB. Do OF ≡ trục đối xứng của (P) nên OAB là tam giác cân tại O.



Gọi $A\left(\frac{a^2}{8}; a\right) \in (P) \Rightarrow B\left(\frac{a^2}{8}; -a\right)$ $(a \neq 0)$

$$\overrightarrow{AF} = \left(2 - \frac{a^2}{8}; -a\right),\quad \overrightarrow{OB} = \left(\frac{a^2}{8}; -a\right)$$

F là trực tâm $\Leftrightarrow \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \left(2 - \frac{a^2}{8}\right).\frac{a^2}{8} + a^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{64} + a^2 = 0 \Leftrightarrow a^4 - 80a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 80 \Leftrightarrow a = \pm 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow A\left(10; 4\sqrt{5}\right),\ B\left(10; -4\sqrt{5}\right)$$

Phương trình cạnh AB: x = 10. Cạnh OA có hệ số góc $k = \frac{4\sqrt{5}}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\Rightarrow$ Phương trình cạnh OA: $y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$ $\Rightarrow$ Phương trình cạnh OB: $y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x$.

Bài 317. Xác định giao điểm của các parabol:

(P_1): $y = x^2 - 2x + 1$

(P_2): $x = y^2 - 6y + 7$.

Giải

Tọa độ các giao điểm của (P_1) và (P_2) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \quad (1) \Leftrightarrow y = (x-1)^2 \\ x = y^2 - 6y + 7 \quad (2) \Leftrightarrow x - 1 = y^2 - 6y + 6 \Leftrightarrow (x-1)^2 = \left(y^2 - 6y + 6\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = y^4 + 36y^2 + 36 - 12y^3 + 12y - 72y \Leftrightarrow y^4 - 12y^3 + 48y^2 - 73y + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y-4)\left(y^2 - 7y + 9\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1;\ \ y = 4 \\ y^2 - 7y + 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1;\ \ y = 4 \\ y = \frac{7-\sqrt{13}}{2};\ y = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2;\ \ x = 1 \\ x = \frac{3-\sqrt{13}}{2};\ x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

(P_1) và (P_2) cắt nhau tại: $A(2;1)$, $B(-1;4)$, $C\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)$, $D\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)$.

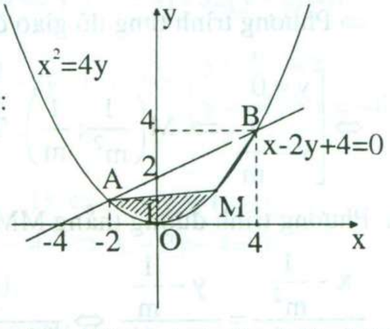
Bài 318. Cho parabol (P): $x^2 = 4y$ và đường thẳng d: $x - 2y + 4 = 0$.

a. Tìm tọa độ giao điểm A, B của (P) và d.

b. Tìm điểm M trên cung AB của (P) sao cho tổng diện tích hai phần hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai dây MA, MB bé nhất.

Giải

a. $x^2 = 4y \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}$



Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x - 2\left(\frac{x^2}{4}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = 1 \\ x = 4 \quad \Rightarrow y = 4 \end{array}\right. \quad \text{Vậy } A(-2;1),\ B(4;4).$$

b. Tổng diện tích hai phần hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai dây MA, MB (phần có gạch chéo trên hình vẽ) bé nhất $\Leftrightarrow$ diện tích tam giác MAB lớn nhất $\Leftrightarrow$ d(M, d) lớn nhất $\Leftrightarrow$ tiếp tuyến tại M của (P) song song với d.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x^2}{4}\Rightarrow y'=\dfrac{x}{2} \\ \text{d có hệ số góc } k=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=\dfrac{1}{4}.\ \text{Vậy điểm cần tìm: } M\left(1;\dfrac{1}{4}\right)$$

Bài 319. Xác định điểm M trên parabol (P): $y^2 = 64x$ ở gần đường thẳng $4x + 3y + 86 = 0$ nhất.

Giải

Gọi $M\left(\dfrac{m^2}{64}; m\right)\in(P)$. Δ: $4x + 3y + 86 = 0$.

$$d(M,\Delta)=\frac{4.\dfrac{m^2}{64}+3m+86}{5}=\frac{\dfrac{m^2}{16}+3m+86}{5}=\frac{\left(\dfrac{m}{4}+6\right)^2+50}{5}\geq 10$$

$\Leftrightarrow \dfrac{m}{4}+6=0 \Leftrightarrow m=-24 \Rightarrow d(M;\Delta)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 10 khi và chỉ khi $m = -24 \Rightarrow$ điểm cần tìm: $M(9; -24)$.

Bài 320. Cho parabol (P): $y^2 = x$ và đường thẳng d qua gốc tọa độ O có hệ số góc $m \neq 0$; d lại cắt (P) tại M. Đường thẳng d' qua O và vuông góc với d cắt (P) tại O, M'.

a. Tính tọa độ M, M' theo m.

b. Chứng minh khi m thay đổi, đường thẳng MM' luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

a. Phương trình d: $y = mx \Rightarrow$ phương trình d': $y=-\dfrac{1}{m}x$.

$y^2 = x$. Từ phương trình d: $x=\dfrac{y}{m}$.

$\Rightarrow$ Phương trình tung độ giao điểm của d và (P): $y^2=\dfrac{y}{m}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\dfrac{1}{m} \end{array}\right. \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{m^2};\dfrac{1}{m}\right)$. Thay m bởi $-\dfrac{1}{m}$ được $N(m^2; -m)$.

b. Phương trình đường thẳng MM':

$$\frac{x-\dfrac{1}{m^2}}{m^2-\dfrac{1}{m^2}}=\frac{y-\dfrac{1}{m}}{-m-\dfrac{1}{m}}\Leftrightarrow\frac{x-\dfrac{1}{m^2}}{\left(m-\dfrac{1}{m}\right)\left(m+\dfrac{1}{m}\right)}=\frac{y-\dfrac{1}{m}}{-\left(m+\dfrac{1}{m}\right)}$$

$$\Leftrightarrow -x+\frac{1}{m^2}=\left(m-\frac{1}{m}\right)y-1+\frac{1}{m^2}\Leftrightarrow -x+1=\left(m-\frac{1}{m}\right)y \quad (*)$$

$\Rightarrow$ Điểm I(1; 0) thỏa (*) $\forall m \neq 0$.

$\Rightarrow$ Đường thẳng MM' luôn luôn đi qua điểm I(1; 0).

Bài 321. Cho parabol (P): $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ và đường thẳng d: $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 > 0)$. Biện luận theo A, B, C, p số giao điểm của d và (P).

Giải

Từ $y^2 = 2px \Leftrightarrow x = \dfrac{y^2}{2p}$ $\Rightarrow$ Phương trình tung độ giao điểm của d và (P):

$$A.\frac{y^2}{2p}+By+C=0.$$

Phương trình này có $\Delta = B^2 - 4.\dfrac{A}{2p}C = B^2 - \dfrac{2A}{p}C = \dfrac{B^2p - 2AC}{p}$.

- Nếu $B^2p - 2AC > 0$: có 2 giao điểm.
- Nếu $B^2p = 2AC$: d và (P) tiếp xúc nhau.
- Nếu $B^2p < 2AC$: d và (P) không có giao điểm.

Bài 322. Lập phương trình tiếp tuyến của parabol (P): $y^2 + 4x = 0$ tại giao điểm của (P) với đường tròn $x^2 + y^2 + 5x + 2y - 4 = 0$ (C).

Giải

(P): $y^2 = -4x \Rightarrow p = 2$; $x = -\dfrac{y^2}{4}$.

Phương trình tung độ giao điểm của (P) và (C): $\left(\dfrac{y^2}{4}\right)^2 + y^2 + 5\left(\dfrac{y^2}{4}\right) + 2y - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{y^4}{16}-\frac{y^2}{4}+2y-4=0 \Leftrightarrow y^4-4y^2+32y-64=0 \Leftrightarrow y^2\left(y^2-4\right)+32(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\left(y^3+2y^2+32\right)=0 \Leftrightarrow (y-2)(y+4)\left(y^2-2y+8\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \Rightarrow x=-1 \\ y=-4 \Rightarrow x=-4 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ (P) và (C) cắt nhau tại: A(−1; 2), B(−4; 4)

$\Rightarrow$ Tiếp tuyến (T_1) của (P) tại A: $2y = -2(x - 1) \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$

Tiếp tuyến (T_1) của (P) tại B: $-4y = -2(x - 4) \Leftrightarrow x - 2y - 4 = 0$.

Bài 323. Lập phương trình tiếp tuyến của parabol:

a. (P): $y^2 = 8x$ song song với đường thẳng $2x - y = 0$

b. (P): $x^2 + 2y = 0$ có hệ số góc bằng 2; tính tọa độ tiếp điểm.

c. (P): $x^2 = 36y$ xuất phát từ A(9; 2).

Giải

a. (P): $y^2 = 8x$ có $p = 4$. Gọi Δ là đường thẳng $2x - y + C = 0$.

(Δ) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow (-1)^2.4 = 2.2.C \Leftrightarrow C = 1$. Tiếp tuyến cần tìm: $2x - y + 1 = 0$.

b. (P): $x^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2y$ có $p = 1$

Tiếp tuyến có hệ số góc bằng 2 thì phương trình có dạng: $2x - y + C = 0$

- Vì tiếp xúc (P) nên: $-1.(2)^2 = 2(-1).C \Leftrightarrow C = 2$

Tiếp tuyến cần tìm: $2x - y + 2 = 0$.

c) (P): $x^2 = 36y$ có $p = 18$.

Gọi Δ là đường thẳng $y = k(x - 9) + 2 \Leftrightarrow kx - y + 2 - 9k = 0$

$$\Delta \text{ tiếp xúc (P)} \Leftrightarrow 18k^2 = -2(2 - 9k) \Leftrightarrow 9k^2 - 9k + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{1}{3} \\ k = \dfrac{2}{3} \end{array}\right..$$

- Với $k = \dfrac{1}{3}$ có tiếp tuyến Δ_1: $\dfrac{1}{3}x - y + 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 3 = 0$.
- Với $k = \dfrac{2}{3}$ có tiếp tuyến Δ_2: $\dfrac{2}{3}x - y + 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 12 = 0$.

Bài 324. Đường thẳng d: $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc parabol (P). Tìm tọa độ tiếp điểm nếu:

a. (P): $y^2 = \alpha x$ $(\alpha \neq 0)$ b. (P): $x^2 = \alpha y$ $(\alpha \neq 0)$.

Giải

a. $y^2 = \alpha x \Leftrightarrow x = \dfrac{y^2}{\alpha}$.

Phương trình tung độ giao điểm của d và (P):

$$\frac{Ay^2}{\alpha} + By + C = 0 \Leftrightarrow Ay^2 + \alpha.By + \alpha C = 0$$

(d) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow \Delta = \alpha^2B^2 - 4\alpha AC = 0 \Leftrightarrow B^2 = \dfrac{4AC}{\alpha}$.

Tung độ tiếp điểm là $y = \dfrac{-\alpha B}{2A}$.

$$\text{Hoành độ tiếp điểm } x = \frac{\left(\dfrac{-\alpha B}{2A}\right)^2}{\alpha} = \frac{\alpha B^2}{4A^2} = \frac{\alpha.\dfrac{4AC}{\alpha}}{4A^2} = \frac{C}{A}$$

$\Rightarrow$ Tọa độ tiếp điểm $M\left(\dfrac{C}{A}; \dfrac{-\alpha B}{2A}\right)$.

b. $x^2 = \alpha y \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2}{\alpha}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$Ax + B\frac{x^2}{\alpha} + C = 0 \Leftrightarrow Bx^2 + \alpha Ax + \alpha C = 0$$

d tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow \Delta = \alpha^2A^2 - 4\alpha BC = 0 \Leftrightarrow A^2 = \dfrac{4BC}{\alpha}$.

Hoành độ tiếp điểm: $x = \dfrac{-\alpha A}{2B}$

Tung độ tiếp điểm $y = \dfrac{\left(-\dfrac{\alpha A}{2B}\right)^2}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2.A^2}{4\beta^2\alpha} = \dfrac{\alpha.\dfrac{4BC}{\alpha}}{4B^2} = \dfrac{C}{B}$

$\Rightarrow$ Tọa độ tiếp điểm: $N\left(\dfrac{-\alpha A}{2B}; \dfrac{C}{B}\right)$.

Bài 325. Lập phương trình tiếp tuyến của parabol:

a. (P): $(x-1)^2 = -4y$ vuông góc với đường thẳng $x - 3y + 1 = 0$ và tìm tọa độ tiếp điểm.

b. (P): $y^2 - 2x + 2y + 7 = 0$ xuất phát từ điểm M(9; –5).

Giải

a. Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (1; 0): \begin{cases} x = 1 + X \\ y = Y \end{cases}$

Trong hệ trục IXY, phương trình (P): $X^2 = -4Y \Rightarrow p = 2$.

Đường thẳng $x - 3y + 1 = 0$ có phương trình: $X - 3Y + 2 = 0$ (Δ).

(Δ) vuông góc với đường thẳng d: $3X + Y + C = 0$.

d tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow 2C.1 = -2(-3)^2 \Leftrightarrow C = -9$.

$\Rightarrow$ phương trình d: $3X + Y - 9 = 0$, đưa về hệ Oxy: $x + y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 12 - 3x$

Thế vào phương trình (P): $(x-1)^2 = -4(12-3x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = -48 + 12x$

$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 = 0 \Leftrightarrow (x-7)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 7 \Rightarrow y = -9$

$\Rightarrow$ tọa độ tiếp điểm: M(7; –9).

b. (P): $y^2 - 2x + 2y + 7 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = 2x - 6 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 2(x-3)$.

Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (3; -1): \begin{cases} x = 3 + X \\ y = -1 + Y \end{cases}$.

Trong hệ trục IXY, (P) có phương trình $Y^2 = 2X$ (p = 1).

M(9; –5) có tọa độ M(6; –4)

Gọi d là đường thẳng $Y = k(X - 6) \Leftrightarrow kX - Y - (6k + 4) = 0$

Để d là tiếp tuyến của (P) thì $\Leftrightarrow 1.(-1)^2 = 2k(-6k - 4)$

$$\Leftrightarrow 12k^2 + 8k + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -\dfrac{1}{2} \\ k = -\dfrac{1}{6} \end{array}\right.$$

- Với $k = -\dfrac{1}{2}$ có tiếp tuyến (T_1): $-\dfrac{1}{2}X - Y - 1 = 0 \Leftrightarrow X + 2Y + 2 = 0$

  Đưa về hệ Oxy: $(x - 3) + 2(y + 1) + 2 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 1 = 0$.

- Với $k = -\dfrac{1}{6}$ có tiếp tuyến (T_2): $-\dfrac{1}{6}X - Y - 3 = 0 \Leftrightarrow X + 6Y + 18 = 0$

  Đưa về hệ Oxy: $x - 3 + 6y + 18 = 0 \Leftrightarrow x + 6y + 21 = 0$.

Bài 326. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm F(3; 0) và đường thẳng d có phương trình $3x - 4y + 16 = 0$.

a. Tính khoảng cách từ F đến d, từ đó suy ra phương trình đường tròn tâm F và tiếp xúc với d.

b. Viết phương trình parabol (P) có tiêu điểm F và đỉnh là gốc tọa độ O. Chứng minh rằng parabol (P) tiếp xúc với đường thẳng d. Tìm tọa độ tiếp điểm.

Giải

a. $d(F, d) = \dfrac{|3.3 - 4.0 + 16|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn tâm F, tiếp xúc d: $(x - 3)^2 + y^2 = 25$.

b. (P): $y^2 = 12x$. d có $A = 3$, $B = -4$, $c = 16$. (P) có $p = 6$.

$B^2p = (-4)^2.6 = 2 . 3 . 16 = 2AC \Leftrightarrow$ (P) tiếp xúc d.

Từ $y^2 = 12x \Leftrightarrow x = \dfrac{y^2}{12}$ thế vào phương trình d: $3.\dfrac{y^2}{12} - 4y + 16 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - 4y + 16 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{2} - 4\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{2} - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 8 \Rightarrow x = \frac{8^2}{12} = \frac{16}{3}.$$

Tọa độ tiếp điểm $M\left(\dfrac{16}{3}; 8\right)$.

Bài 327. Cho parabol (P): $y^2 + 2px = 0$ $(p > 0)$

a. Chứng minh với mỗi $m \in R$, qua $A\left(\dfrac{p}{2}; m\right)$ ta luôn vẽ được hai tiếp tuyến với (P) và hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau.

b. Viết phương trình đường thẳng qua hai tiếp điểm và chứng minh đường thẳng này đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.

Giải

a. (P) có tham số tiêu bằng p.

Điểm $A\left(\frac{p}{2}; m\right)$ là một điểm bất kỳ thuộc đường chuẩn $x = \frac{p}{2}$ của (P).

Gọi d là đường thẳng $y = k\left(x - \frac{p}{2}\right) + m \Leftrightarrow kx - y + m - \frac{kp}{2} = 0$.

d có $A = k$; $B = -1$; $C = m - \frac{kp}{2}$.

d tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow (-1)^2.p = 2AC = 2k\left(m - \frac{kp}{2}\right)$

$\Leftrightarrow pk^2 - 2mk - p = 0$: phương trình bậc hai theo k này chắc chắn có hai nghiệm phân biệt k_1, k_2 có: $\Delta' = m^2 + p^2 > 0\ \forall m \in \mathbb{R}$.

$k_1.k_2 = \frac{-p}{p} = 1 \Leftrightarrow$ hai tiếp tuyến phân biệt vẽ từ A đến (P) vuông góc với nhau.

b. Hai tiếp tuyến nói trong câu a) tiếp xúc (P) tại $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$.

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (T_1) tại $M(x_1; y_1)$: $y.y_1 = -p(x + x_1)$

Phương trình tiếp tuyến (T_2) tại $N(x_2; y_2)$: $y.y_2 = -p(x + x_2)$

(T_1) qua $A\left(\frac{p}{2}; m\right) \Leftrightarrow m.y_1 = -p\left(\frac{p}{2} + x_1\right)$ (1)

(T_2) qua $A\left(\frac{p}{2}; m\right) \Leftrightarrow m.y_2 = -p\left(\frac{p}{2} + x_2\right)$ (2)

(1) và (2) chứng tỏ tọa độ M, N thỏa chung một phương trình. Phương trình đó là $my = -p\left(\frac{p}{2} + x\right)$ (*) đây chính là phương trình của đường thẳng qua hai tiếp điểm. Dễ thấy điểm $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$ thỏa (*) với bất cứ giá trị nào của m.

$\Rightarrow$ Đường thẳng MN luôn đi qua tiêu điểm F của (P).

Bài 328. Trong mặt phẳng Oxy, tìm phương trình của parabol (P) có:

a. Đỉnh O, trục đối xứng Ox và tiếp xúc với đường thẳng d: $x - 2y + 2 = 0$.

b. Trục đối xứng Oy và tiếp xúc với hai đường thẳng

d_1: $x - y = 0$; d_2: $2x + 4y - 3 = 0$.

Giải

a. Phương trình (P) có dạng $y^2 = +2px$. d có $A = 1$, $B = -2$, $C = 2$

(P) tiếp xúc d $\Leftrightarrow (-2)^2.p = 2.1.2 \Leftrightarrow p = 1 \Rightarrow$ Phương trình (P): $y^2 = 2x$.

b. Phương trình (P) có dạng $y = ax^2 + c$

(P) tiếp xúc $d_1 \Leftrightarrow$ phương trình $ax^2 + c = x \Leftrightarrow ax^2 - x + c = 0$ có $\Delta = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - 4ac = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{4a} \Rightarrow (P):\ y = ax^2 + \frac{1}{4a}.$$

(P) tiếp xúc $d_2 \Leftrightarrow$ phương trình $ax^2 + \frac{1}{4a} = \frac{3-2x}{4}$ có $\Delta' = 0$

$$ax^2 + \frac{1}{4a} = \frac{3-2x}{4} \Leftrightarrow 4ax^2 + \frac{1}{a} = 3 - 2x \Leftrightarrow 4ax^2 + 2x + \frac{1}{a} - 3 = 0$$

Có: $\Delta' = 1 - 4a\left(\frac{1}{a} - 3\right) = 12a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow c = 1.$

Phương trình (P): $y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = 4(y-1)$.

Bài 329. Cho đường thẳng Δ cố định và điểm F cố định không thuộc Δ. Tìm tập hợp tâm các đường tròn qua F và tiếp xúc Δ.

Giải

Gọi M là tâm các đường tròn:

- Qua F $\Leftrightarrow$ R = MF.
- Tiếp xúc Δ $\Leftrightarrow$ R = d(M; Δ)

MF = d(M; Δ) $\Leftrightarrow$ Tập hợp điểm M là parabol có tiêu điểm F, đường chuẩn Δ.

Bài 330. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(a; 0) (a ≠ 0). Tìm tập hợp các điểm M sao cho: $\left[d(M, Oy)\right]^2 - MA^2 = k^2$ (k: hằng số cho trước).

Giải

Gọi M(x; y): $d(M, Oy) = |x|$

$MA^2 = (a - x)^2 + (-y)^2$

$$\left[d(M, Oy)\right]^2 - MA^2 = k^2 \Leftrightarrow x^2 - (a-x)^2 - y^2 = k^2 \Leftrightarrow y^2 = 2ax - \left(a^2 + k^2\right)$$

$\Leftrightarrow y^2 = 2a\left(x - \frac{a^2 + k^2}{2a}\right)$ là phương trình tập hợp điểm M.

Bài 331. a) Trong mặt phẳng Oxy viết phương trình parabol (P) đỉnh O, trục Ox, biết (P) đi qua điểm I(1; –2).

b. Điểm M di động trên (P). Tìm tập hợp trung điểm N của IM.

Giải

a. Phương trình (P) có dạng $y^2 = 2px$. (P) qua I(1; –2) $\Leftrightarrow (-2)^2 = 2p.1$

$\Leftrightarrow p = 2$: (P): $y^2 = 4x$.

b. Gọi $M\left(\dfrac{m^2}{4}; m\right) \in (P)$, có I(1; –2)

Gọi N(x; y) là trung điểm IM thì: $\begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{m^2+1}{4}}{2} & (1) \\ y = \dfrac{m-2}{2} & (2) \end{cases}$

Từ (2) ⇔ m = 2y + 2 thế vào (1): $2x = \dfrac{(2y+2)^2}{4} + 1 \Leftrightarrow 2x = (y+1)^2 + 1$

$\Leftrightarrow (y+1)^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ là phương trình tập hợp điểm N.

Bài 332. Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P) $y^2 = 2px$ ($p > 0$). Tiếp tuyến tại một điểm M bất kì của (P) cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại A, B. Tìm tập hợp trung điểm đoạn AB.

Giải

Gọi $M\left(\dfrac{m^2}{4}; m\right) \in (P)$. Phương trình tiếp tuyến (T) của (P) tại M:

$$my = p\left(x + \frac{m^2}{2p}\right) \Leftrightarrow px - my + \frac{m^2}{2} = 0 \ (T)$$

(T) cắt trục Ox tại $A\left(-\dfrac{m^2}{2p}; 0\right)$; (T) cắt trục Oy tại $B\left(0; \dfrac{m}{2}\right)$.

Gọi I(x; y) là trung điểm đoạn AB thì: $\begin{cases} x = \dfrac{-m^2}{4p} & (1) \\ y = \dfrac{m}{4} & (2) \end{cases}$

Từ (2): m = 4y. Thế vào (1): $x = \dfrac{-(4y)^2}{4p} = \dfrac{-4y^2}{p} \Leftrightarrow y^2 = -\dfrac{p}{4}x$ là phương trình tập hợp trung điểm của đoạn AB.

Bài 333. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(1; 0). Điểm M di chuyển trên đường tròn (C) tâm O, bán kính 1. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên Oy.

a. Tính tọa độ giao điểm N của các đường thẳng OM và AH theo góc $\alpha = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$.

b. Xác định và vẽ quỹ tích của N khi M chạy trên (C).

Giải

a. $M(\cos\alpha; \sin\alpha) \Rightarrow H(0; \sin\alpha)$

Phương trình đường thẳng OM: $y = \tan\alpha \,.\, x$ (1)

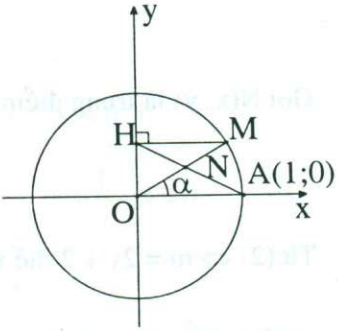
Phương trình đường thẳng AH: $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{\sin\alpha} = 1$ (2)

Thế $y = x \,.\, \tan\alpha$ từ (1) vào (2):

$$x + \frac{x\tan\alpha}{\sin\alpha} = 1 \Leftrightarrow x\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \Rightarrow y = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow N\left(\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}; \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right).$$



b. Biến đổi:

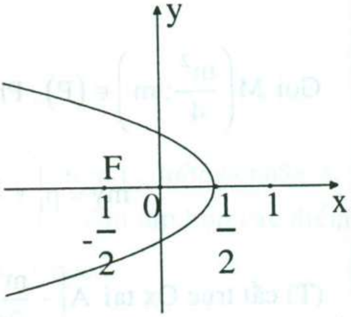
$$x_N = \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 1 - \frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$y_N = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}.$$

$$x_N = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2{}_N$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2{}_N = \frac{1}{2} - x_N \Leftrightarrow y^2{}_N = 1 - 2x_N$$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm N là parabol $y^2 = 1 - 2x \Leftrightarrow y^2 = -2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$.



Hình vé

Bài 334. Cho parabol (P): $y^2 = 2x$ có tiêu điểm F. Với $t \neq 0$, đặt $M\left(\dfrac{t^2}{2}; t\right)$.

Đường thẳng FM lại cắt (P) tại N $(N \neq M)$.

a. Tính tọa độ trung điểm I của MN.

b. Tìm tập hợp các điểm I.

Giải

a) $M\left(\dfrac{t^2}{2}; t\right)$, $F\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$

Phương trình đường thẳng MF: $\dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{y}{t} \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{t^2-1}=\dfrac{y}{t} \Leftrightarrow 2tx-t=y\left(t^2-1\right)$.

Thay $x=\dfrac{y^2}{2}$: $2t.\left(\dfrac{y^2}{2}\right)-t=\left(t^2-1\right)y \Leftrightarrow ty^2-\left(t^2-1\right)y-t=0$

Phương trình có một nghiệm: $y_1=t$

$$\Rightarrow t+y_2=\frac{t^2-1}{t}=t-\frac{1}{t} \Rightarrow y_2=-\frac{1}{t} \Rightarrow x_2=\frac{1}{2t^2}$$

$$\Rightarrow N\left(\frac{1}{2t^2};-\frac{1}{t}\right) \Rightarrow I\begin{cases} x=\dfrac{x_M+x_N}{2}=\dfrac{\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2t^2}}{2}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(t^2+\dfrac{1}{t^2}\right)}{2} & (1)\\ y=\dfrac{y_M+y_N}{2}=\dfrac{t-\dfrac{1}{t}}{2} & (2)\end{cases}$$

b) Từ (2) $\Leftrightarrow t-\dfrac{1}{t}=2y \Leftrightarrow t^2+\dfrac{1}{t^2}-2=4y^2 \Leftrightarrow t^2+\dfrac{1}{t^2}=4y^2+2$ thay vào (1):

$$x=\frac{\frac{1}{2}\left(4y^2+2\right)}{2}=\frac{2y^2+1}{2} \Leftrightarrow 2y^2=2x-1 \Leftrightarrow y^2=x-\frac{1}{2}.$$

Bài 335. Cho parabol (P): $x^2=2py$ $(p>0)$. Đường thẳng d đi qua tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N. Tìm tập hợp trung điểm I của MN.

Giải

$F\left(0;\dfrac{p}{2}\right)$. Phương trình d: $y=kx+\dfrac{p}{2}$ thay $y=\dfrac{x^2}{2p}$ được phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d: $\dfrac{x^2}{2p}-kx-\dfrac{p}{2}=0$.

- $M(x_M;y_M)$, $N(x_N;y_N)$: $x_M+x_N=\dfrac{k}{\dfrac{1}{2p}}=2pk$.

$$\Rightarrow y_M+y_N=k\left(x_M+x_N\right)+p=k.2pk+p=2k^2p+p.$$

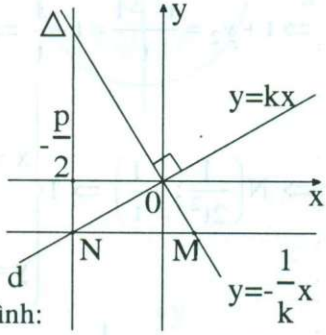
I(x; y) là trung điểm MN thì $\begin{cases} x=\dfrac{x_M+x_N}{2}=pk & (1)\\ y=\dfrac{y_M+y_N}{2}=pk^2+\dfrac{p}{2} & (2)\end{cases}$

Từ (1): $k=\frac{x}{p}$ thế vào (2): $y=p.\left(\frac{x^2}{p^2}\right)+\frac{p}{2}=\frac{x^2}{p}+\frac{p}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{p}=y-\frac{p}{2}$

$\Leftrightarrow x^2=p\left(y-\frac{p}{2}\right)$ là phương trình tập hợp điểm I.

Bài 336. Cho đường thẳng Δ và điểm O cố định (O ∉ Δ). Một đường thẳng quay quanh O cắt Δ tại N. Đường thẳng vuông góc với Δ tại N cắt đường thẳng qua O vuông góc với ON tại M. Tìm tập hợp các điểm M.

Giải



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Đường thẳng Δ có phương trình: $x+\frac{p}{2}=0$.

Đường thẳng d quay quanh O có phương trình $y=kx \Rightarrow N\left(-\frac{p}{2};-\frac{p}{2}.k\right)$

Đường thẳng vuông góc với Δ tại N có phương trình:

$y=-\frac{p}{2}k$. Đường thẳng qua O và vuông góc với ON có phương trình:

$y=-\frac{1}{k}x$. Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y=-\frac{1}{k}x \\ y=-\frac{p}{2}k \end{cases}$

$\Rightarrow M\left(\frac{pk^2}{2};-\frac{pk}{2}\right)$.

Gọi M(x; y) thì : $\begin{cases} x=\frac{pk^2}{2} & (1) \\ y=-\frac{pk}{2} & (2) \end{cases}$ Từ (2) có $k=\frac{-2y}{p}$ thế vào (1):

$x=\frac{p}{2}\left(\frac{-2y}{p}\right)^2=\frac{2y^2}{p} \Leftrightarrow 2y^2=px \Leftrightarrow y^2=\frac{1}{2}px$ là phương trình tập hợp điểm M.

Bài 337. Cho đường thẳng d cố định và đường tròn (C) cố định tiếp xúc d tại A. Tìm tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc (C) và d tại hai điểm phân biệt.

Giải

Vẽ thêm đường thẳng Δ vuông góc với:

AF (F là tâm của (C) tại I, sao cho:

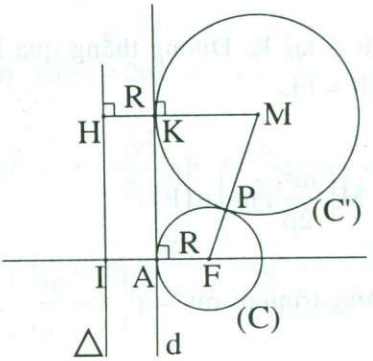
IF = 2AF. Gọi AF = R ⇒ IA = HK = R.

M là tâm của (C'):

(C') tiếp xúc d ⇔ MH = KM + R

(C') tiếp xúc (C) ⇒ MF = MP + R

⇒ MF = MH ⇒ tập hợp điểm M là parabol có tiêu điểm F là tâm của (C) và đường chuẩn Δ song song với d, cách d một khoảng bằng R.



Bài 338. Cho đường thẳng d và một điểm F. Tìm tập hợp những điểm M sao cho tổng các khoảng cách đến F và d bằng một hằng số dương l. (l > d(F, d)).

Giải

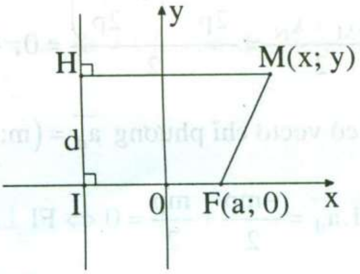
- Trường hợp 1:

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ:

Gọi $d(F; d) = b$, $OF = a$, $b > a$

$$MF = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}$$

$$MH = x + b - a.$$



$MF + MH = l \Leftrightarrow MF = l - MH = (l - b + a) - x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-x)^2 + y^2} = \left[(l-b+a)-x\right] \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = (l-b+a)^2 + x^2 - 2(l-b+a)x$$

$$\Leftrightarrow y^2 = -2(l-b)x + (l-b+a)^2 - a^2 \qquad (P_1).$$

- Trường hợp 2:

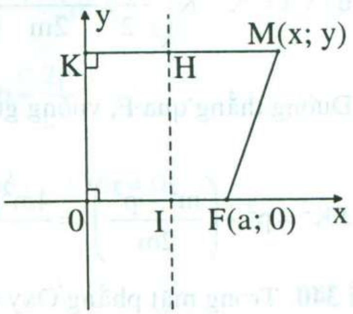
Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

$d(F, d) = b$, $OF = a$, $b < a$.

$$MF = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}$$

$$MH = MK - KH = x - (a - b)$$

$$MF + MH = l \Leftrightarrow MF = l - MH = l - x + a - b$$



$$\Leftrightarrow (a-x)^2 + y^2 = \left[(l+a-b)-x\right]^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 - 2(l+a-b)x + (l+a-b)^2 \Leftrightarrow y^2 = -2(l-b)x + (l-b+a)^2 - a^2 \ (P_2)$$

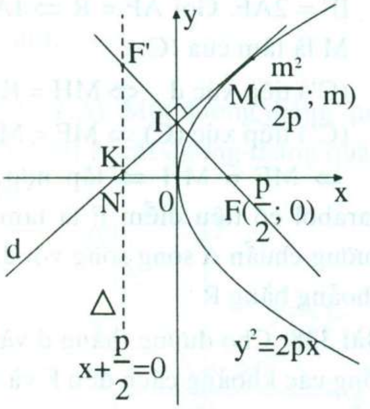
Dễ thấy $(P_1) \equiv (P_2)$. Tập hợp điểm M là parabol.

Bài 339. Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ. Tiếp tuyến d của (P) tại M cắt Oy, Ox lần lượt tại I, N.

a. Chứng minh I là trung điểm MN, FI ⊥ d và điểm đối xứng của F qua I nằm trên Δ.

b. d cắt Δ tại K. Đường thẳng qua F và vuông góc với Ox cắt d tại L. Chứng minh FK = FL.

Giải


y
F'
$M\left(\frac{m^2}{2p};m\right)$
I
K
N
0
x
$F\left(\frac{p}{2};0\right)$
d
Δ
$y^2=2px$
$x+\frac{p}{2}=0$

a. Gọi $M\left(\frac{m^2}{2p};m\right)\in(P)$

Phương trình d: $my=p\left(x+\frac{m^2}{2p}\right)$.

d cắt Oy tại $I\left(0;\frac{m}{2}\right)$, d cắt Ox tại $N\left(-\frac{m^2}{2p};0\right)$

$$\frac{x_M+x_N}{2}=\frac{\frac{m^2}{2p}+\left(-\frac{m^2}{2p}\right)}{2}=0;\ \frac{y_M+y_N}{2}=\frac{m}{2}\Rightarrow I\left(0;\frac{m}{2}\right)\text{ là trung điểm MN.}$$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(m;p)$; $\overrightarrow{FI}=\left(-\frac{p}{2};\frac{m}{2}\right)$

$$\overrightarrow{FI}.\overrightarrow{a_d}=\frac{-mp}{2}+\frac{mp}{2}=0\Leftrightarrow FI\perp d.$$

Gọi F'(x; y) là điểm đối xứng với F qua I: $\begin{cases}x+\frac{p}{2}=0\\ y+0=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{p}{2}\\ y=m\end{cases}\Leftrightarrow F'\left(-\frac{p}{2};m\right)\in\Delta$

b. $d\cap\Delta=K$: $K\left(-\frac{p}{2};\frac{m^2-p^2}{2m}\right)$

Đường thẳng qua F, vuông góc với Ox có phương trình $x=\frac{p}{2}\Rightarrow L\left(\frac{p}{2};\frac{m^2+p^2}{2m}\right)$

$$FK^2=p^2+\left(\frac{m^2-p^2}{2m}\right)^2=\frac{4m^2p^2+m^4-2m^2p^2+p^4}{4m^2}=\left(\frac{m^2+p^2}{2m}\right)^2=FL^2\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 340. Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y^2=2px$ $(p>0)$. Một đường thẳng di động d cắt (P) tại M, N và cắt Ox tại I. Chứng minh:

a. ${x_I}^2=x_M.x_N$.

b. Nếu tam giác OMN vuông tại O thì $x_M.x_N=4p^2$ và d qua một điểm cố định.

Giải

a. Giả sử d có phương trình $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. Từ $y^2 = 2px \Leftrightarrow x = \dfrac{y^2}{2p}$.

Phương trình tung độ giao điểm của d và (P): $y = \dfrac{ay^2}{2p} + b \Leftrightarrow \dfrac{a}{2p}y^2 - y + b = 0$.

y_M; y_N là hai nghiệm của phương trình này $\Leftrightarrow y_M.y_N = \dfrac{2pb}{a} \Rightarrow {y_M}^2.{y_N}^2 = \dfrac{4p^2b^2}{a^2}$.

$$\Rightarrow x_M.x_N = \frac{{y_M}^2}{2p}.\frac{{y_N}^2}{2p} = \frac{\dfrac{4p^2b^2}{a^2}}{4p^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

d cắt Ox tại I thì $x_I = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow {x_I}^2 = \dfrac{b^2}{a^2} = x_M.x_N$ (đpcm).

b. Giả sử đường thẳng OM có phương trình $y = kx$ $(k \neq 0)$. Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = kx \\ x = \dfrac{y^2}{2p} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{2p}{k^2}; \dfrac{2p}{k}\right)$.

Thế k bởi $-\dfrac{1}{k}$ được: $N(2pk^2; -2pk)$.

Phương trình đường thẳng MN:

$$\frac{x - \dfrac{2p}{k^2}}{2pk^2 - \dfrac{2p}{k^2}} = \frac{y - \dfrac{2p}{k}}{-2pk - \dfrac{2p}{k}} \Leftrightarrow \frac{x - \dfrac{2p}{k^2}}{2p\left(k + \dfrac{1}{k}\right)\left(k - \dfrac{1}{k}\right)} = \frac{y - \dfrac{2p}{k}}{-2p\left(k + \dfrac{1}{k}\right)}$$

$$\Leftrightarrow -x + \frac{2p}{k^2} = \left(y - \frac{2p}{k}\right)\left(k - \frac{1}{k}\right) = \left(k - \frac{1}{k}\right)y - 2p + \frac{2p}{k^2}$$

$\Leftrightarrow -x + 2p = \left(k - \dfrac{1}{k}\right)y$ (*) Điểm Q(2p; 0) thỏa (*) $\forall k \neq 0$.

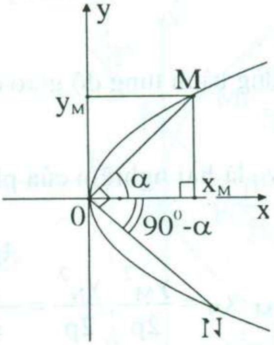
$\Rightarrow$ d luôn luôn qua Q(2p; 0) cố định.

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_M = \dfrac{2p}{k^2} \\ x_N = 2pk^2 \end{matrix}\right\} x_M.x_N = 4p^2 \text{ (đpcm)}.$$

Bài 341. Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y^2 = 2px$ $(p > 0)$. Góc vuông $\widehat{mOn}$ quay quanh O. Om, On cắt (P) tại M, N với $y_M > 0$, $y_N < 0$. Đặt $\alpha = \widehat{xOm}$. Tính hoành độ M, N theo p, α và suy ra $x_M.x_N$ không đổi.

Giải

Xem hình vẽ:



$y_M = x_M.\tan\alpha$

$M(x_M; y_M) \in (P) \Leftrightarrow {y_M}^2 = 2px_M$

$\Leftrightarrow {x_M}^2.\tan^2\alpha = 2px_M$

$\Leftrightarrow x_M = \dfrac{2p}{\tan^2\alpha} = 2p.\cot^2\alpha$

$\Rightarrow x_N = 2p.\cot^2\left(90^0 - \alpha\right) = 2p.\tan^2\alpha$

$\Rightarrow x_M.x_N = 4p^2$.

Bài 342. Viết phương trình đường thẳng cắt parabol (P):

$y^2 - 4y - 8x - 4 = 0$ tại hai điểm A, B sao cho M(0; 4) là trung điểm đoạn AB.

Giải

$y^2 - 4y - 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 = 8x + 8 \Leftrightarrow (y-2)^2 = 8(x+1)$.

Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (-1; 2)$: $\begin{cases} x = -1 + X \\ y = 2 + Y \end{cases}$

Trong hệ trục IXY, (P) có phương trình: $Y^2 = 8X$.

Trong hệ trục IXY: M(1; 2).

Gọi d là đường thẳng Y = AX + B. Từ $Y^2 = 8X \Leftrightarrow X = \dfrac{Y^2}{8}$.

Phương trình tung độ giao điểm của d và (P): $\dfrac{AY^2}{8} - Y + B = 0$.

$Y_A + Y_B = \dfrac{1}{\frac{A}{8}} = \dfrac{8}{A}$.

M(1; 2) là trung điểm của AB nên: $\dfrac{Y_A + Y_B}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{A} = 2 \Leftrightarrow A = 2$.

$\begin{matrix} Y_A = AX_A + B \\ Y_B = AX_B + B \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad X_A + X_B = \dfrac{Y_A + Y_B - 2B}{A} = 2 - B$

M là trung điểm AB $\Leftrightarrow \dfrac{2-B}{2} = 1 \Leftrightarrow B = 0$.

Trong hệ IXY đường thẳng AB có phương trình Y = 2X. Đưa về hệ Oxy: y – 2 = 2(x + 1) ⇔ y = 2x + 4 là phương trình đường thẳng cần tìm.

Bài 343. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d: $x + 4my - m = 0$. d cắt P) tại M, N. Chứng minh đường tròn đường kính MN luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định khi m thay đổi.

Giải

Thế $y = x^2$ vào phương trình d: $4mx^2 + x - m = 0$. Phương trình này chắc chắn có hai nghiệm phân biệt x_M, x_N:

$$x_M + x_N = -\frac{1}{4m};\ x_N - x_M = \frac{\sqrt{16m^2+1}}{4m}\ (x_N > x_M);\ x_M.x_N = -\frac{1}{4}.$$

Từ $x + 4my - m = 0 \Leftrightarrow y = \frac{m-x}{4m}\ (m \neq 0) \Rightarrow y_M = \frac{m-x_M}{4m};\ y_N = \frac{m-x_N}{4m}$

$$\Rightarrow y_M - y_N = \frac{-(x_M - x_N)}{4m} = \frac{\dfrac{\sqrt{16m^2+1}}{4m}}{4m} = \frac{\sqrt{16m^2+1}}{16m^2}$$

$$y_M + y_N = x_M{}^2 + x_N{}^2 = (x_M + x_N)^2 - 2x_M.x_N = \frac{1}{16m^2} + \frac{1}{2} = \frac{8m^2+1}{16m^2}.$$

- $MN^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 = \dfrac{16m^2+1}{16m^2} + \dfrac{16m^2+1}{(16m^2)^2} = \dfrac{(16m^2+1)(16m^2+1)}{(16m^2)^2}$

$\Rightarrow$ Bán kính đường tròn đường kính MN: $R = \dfrac{16m^2+1}{2.16m^2} = \dfrac{16m^2+1}{32m^2}$.

Gọi Δ là đường thẳng $ax - y + b = 0$.

Gọi I là trung điểm MN (tâm đường tròn đường kính MN) thì $I\left(-\dfrac{1}{8m}; \dfrac{8m^2+1}{32m^2}\right)$

$$d(I, \Delta) = \frac{\left|-\dfrac{a}{8m} - \dfrac{8m^2+1}{32m^2} + b\right|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{\left|(32b-8)m^2 - 4am - 1\right|}{32m^2\sqrt{a^2+1}}$$

Đường tròn đường kính MN tiếp xúc Δ khi và chỉ khi $d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|(32b-8)m^2 - 4am - 1\right|}{32m^2\sqrt{a^2+1}} = \frac{16m^2+1}{32m^2} \Leftrightarrow \left|(32b-8)m^2 - 4am - 1\right| = (16m^2+1)\sqrt{a^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (32b-8)^2m^4 + 16a^2m^2 + 1 - 8a(32b-8)m^3 - 2(32b-8)m^2 + 8am = (16m^2+1)^2.(a^2+1)$$

$$\Leftrightarrow (32b-8)^2m^4 - 8a(32b-8)m^3 + \left(16a^2 - 2(32b-8)\right)m^2 + 8am + 1$$

$$= 256(a^2+1)m^4 + 32(a^2+1)m^2 + a^2 + 1 \quad (*)$$

Để (*) thỏa mãn với mọi m thì:

$$\begin{cases}(32b-8)^2=256\left(a^2+1\right)\\ -8a(32b-8)=0\\ \left(16a^2-2(32b-8)\right)=32\left(a^2+1\right)\\ 8a=0\\ 1=a^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đường tròn đường kính MN luôn tiếp xúc với đường thẳng $y+\frac{1}{4}=0$.

Bài 344. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm F(1; 0) và một điểm thay đổi M(–1; m) với $m\in\mathbb{R}$.

a. Với mỗi giá trị của m, hãy viết phương trình đường trung trực Δ của đoạn MF.

b. Tìm những điểm trên mặt phẳng Oxy mà không thuộc đường thẳng Δ nào.

c. Chứng minh Δ luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

Giải

F(1; 0), M(–1; m) $\Rightarrow \overrightarrow{MF}=(2;-m)$

a. Gọi I là trung điểm MF: $I\left(0;\frac{m}{2}\right)$

$\overrightarrow{MF}$ là vectơ pháp tuyến của đường trung trực Δ của đoạn MF. Phương trình Δ có dạng: $2x-my+C=0$.

Δ qua I $\Leftrightarrow 2.0-m.\frac{m}{2}+C=0\Leftrightarrow C=\frac{m^2}{2}$.

$\Rightarrow$ Phương trình Δ: $2x-my+\frac{m^2}{2}=0\Leftrightarrow 4x-2my+m^2=0$.

b. Coi Δ là phương trình bậc hai của m: $m^2-2my+4x=0$ (*)

Phương trình này có $\Delta'=y^2-4x$. Nếu $\Delta'<0\Leftrightarrow y^2<4x$ thì (*) không thỏa $\forall m\Leftrightarrow$ Những điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy thỏa $y^2<4x$ là những điểm không thuộc Δ.

c. Phương trình: $4x-2my+m^2=0$ có A = 4, B = –2m, C = m^2 nếu tiếp xúc với parabol (P): $y^2=2px$ thì: $(-2m)^2.p=2.4.m^2\Leftrightarrow p=2$.

$\Leftrightarrow$ Δ luôn tiếp xúc với parabol $y^2=4x$.

Bài 345. M là một điểm thuộc parabol $y^2=64x$, N là một điểm thuộc đường thẳng $4x+3y+46=0$ (d).

a. Xác định M, N để đoạn MN ngắn nhất.

b. Với kết quả tìm được ở câu a, chứng tỏ rằng khi đó đường thẳng MN vuông góc với tiếp tuyến tại M của parabol.

Giải

a. Gọi $M\left(\frac{m^2}{64}; m\right)$.

$$\Rightarrow d\left(M,(d)\right)=\frac{\frac{4m^2}{64}+3m+46}{5}=\frac{\frac{m^2}{16}+3m+46}{5}=\frac{\left(\frac{m}{4}+6\right)^2+10}{5}\geq 2$$

$\Rightarrow$ Khoảng cách nhỏ nhất giữa M và đường thẳng d là 2, đạt được khi:

$\frac{m}{4}+6=0 \Leftrightarrow m=-24 \Rightarrow M(9;-24)$.

Gọi $N\left(n;\frac{-4n-46}{3}\right)\in d$.

$$MN^2=(n-9)^2+\left(\frac{-4n-46}{3}+24\right)^2=(n-9)^2+\left(\frac{-4n+26}{3}\right)^2$$

$$=n^2-18n+81+\frac{16n^2-208n+676}{9}=\frac{25n^2-370n+1405}{9}$$

$=\frac{(5n-37)^2+36}{9}\geq 4 \Leftrightarrow MN_{min}=2$ đạt được khi:

$5n-37=0 \Leftrightarrow n=\frac{37}{5}\Rightarrow N\left(\frac{37}{5};\frac{-126}{5}\right)$

$\Rightarrow M(9;-24)$, $N\left(\frac{37}{5};\frac{-126}{5}\right)$ là hai điểm cần tìm.

b. Tiếp tuyến tại M của parabol có phương trình:

$-24y=32(x+9) \Leftrightarrow -3y=4x+36 \Leftrightarrow 4x+3y+36=0$

Tiếp tuyến này có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(-3;4)$

$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{8}{5};-\frac{6}{5}\right)$. $\overrightarrow{MN}.\vec{a}=\frac{24}{5}-\frac{24}{5}=0\Rightarrow$ đpcm.

Bài 346. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(3; 0) và parabol (P) có phương trình $y=x^2$.

a. M là điểm thuộc (P) có hoành độ $x_M=a$. Tính độ dài đoạn AM. Xác định a để AM ngắn nhất.

b. Chứng minh khi AM ngắn nhất thì AM vuông góc với tiếp tuyến tại M của parabol (P).

Giải

a. $M(a; a^2)$; $AM^2 = (a-3)^2 + a^4 = f(a) \Rightarrow AM = \sqrt{a^4 + (a-3)^2}$

$f'(a) = 4a^3 + 2(a-3) = 2(a-1)(2a^2 + 2a + 3)$

Bảng biến thiên của hàm số f(a) cho biết AM_{min} khi a = 1.

a	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(a)		−	0	+	
f(a)	$-\infty$	↘		↗	$+\infty$

b. $A(3; 0)$, $M(1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-2; 1)$

Tiếp tuyến tại M(1; 1) của (P): $x = \frac{1}{2}(y+1) \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$

Tiếp tuyến có vectơ chỉ phương: $\vec{a} = (1; 2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{a} = -2 + 2 = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 347. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng d: $2mx - 2y + 1 = 0$.

a. Chứng minh với mọi giá trị của m, d luôn đi qua tiêu điểm F của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N. Tìm quỹ tích của trung điểm I của đoạn MN khi m thay đổi.

b. Tính góc tạo bởi các tiếp tuyến tại M và tại N của parabol (P).

Giải

a. $y = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2y \Rightarrow F\left(0; \frac{1}{2}\right)$

d: $2mx - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2mx - 2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow$ d luôn qua $F\left(0; \frac{1}{2}\right)$ với $\forall m$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$2mx - 2.\frac{1}{2}x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 1 = 0$$

Phương trình này có $\Delta' = m^2 + 1 > 0\ \forall m \Leftrightarrow$ d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt x_M, x_N và $x_M + x_N = 2m$, $x_M \cdot x_N = -1$.

$$I(x; y) \text{ thì } \begin{cases} x = \dfrac{x_M + x_N}{2} = m \\ y = \dfrac{y_M + y_N}{2} = m\left(x_M + x_N\right) + 1 = 2m^2 + 1 \end{cases}$$

Thay m = x được $y = 2x^2 + 1$ là phương trình quỹ tích trung điểm I của đoạn MN.

. $y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y' = x$.

Tại M, tiếp tuyến của (P) có hệ số góc $k_1 = x_M$.

Tại N, tiếp tuyến của (P) có hệ số góc $k_2 = x_N$.

$k_1.k_2 = x_M . x_N = -1 \Leftrightarrow$ các tiếp tuyến của (P) tại M và tại N vuông góc với nhau.

ài 348. Cho parabol (P): $y^2 = 2px$. Từ một điểm I bất kì trên đường chuẩn của (P), ẻ hai tiếp tuyến với (P). Chứng minh các tiếp điểm và tiêu điểm thẳng hàng.

Giải

Gọi $I\left(-\frac{p}{2}; m\right) \in$ đường chuẩn $x = -\frac{p}{2}$ của (P)

(P) có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$

Tiếp tuyến (T_1) của (P) tại $M(x_M; y_M)$ có phương trình: $y_M.y = p(x + x_M)$

Tiếp tuyến (T_2) của (P) tại $N(x_N; y_N)$ có phương trình: $y_N.y = p(x + x_N)$

(T_1) qua $I\left(-\frac{p}{2}; m\right) \Leftrightarrow y_M.m = p\left(-\frac{p}{2} + x_M\right)$

(T_2) qua $I\left(-\frac{p}{2}; m\right) \Leftrightarrow y_N.m = p\left(-\frac{p}{2} + x_N\right)$

$\Rightarrow$ Các tọa độ M, N đều thỏa chung phương trình: $m.y = px - \frac{p^2}{2}$

$\Rightarrow px - my - \frac{p^2}{2} = 0$ là phương trình của đường thẳng MN.

$px - my - \frac{p^2}{2} = 0 \Leftrightarrow p\left(x - \frac{p}{2}\right) - my = 0$ luôn luôn đi qua $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \Rightarrow$ đpcm.

ài 349. Cho parabol (P): $y^2 = 2px$. Tìm tập hợp những điểm từ đó kẻ được hai ếp tuyến của (P) vuông góc với nhau.

Giải

(P): $y^2 = 2px$ có $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, đường chuẩn Δ: $x + \frac{p}{2} = 0$.

Gọi Δ là đường thẳng qua $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc bằng k.

Δ: $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow kx - y + y_0 - kx_0 = 0$

(Δ) là tiếp tuyến của (P) $\Leftrightarrow (-1)^2.\ p = 2k(y_0 - kx_0) \Leftrightarrow 2x_0k^2 - 2y_0k + p = 0$.

Để phương trình này có hai nghiệm phân biệt k_1, k_2 thì $2x_0 . p < 0$.

Lúc đó $k_1.k_2 = \dfrac{p}{2x_0}$. Để hai tiếp tuyến xuất phát từ $M(x_0;\ y_0)$ vuông góc nhau thì $k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow \dfrac{p}{2x_0} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -\dfrac{p}{2}$, y_0 tùy ý.

$\Rightarrow$ Tập hợp những điểm $M(x_0;\ y_0)$ thỏa yêu cầu bài toán thì $x_0 = -\dfrac{p}{2}$.

$\Rightarrow$ Tập hợp những điểm M từ đó kẻ được hai tiếp tuyến của (P) vuông góc với nhau là đường chuẩn $x = -\dfrac{p}{2}$.

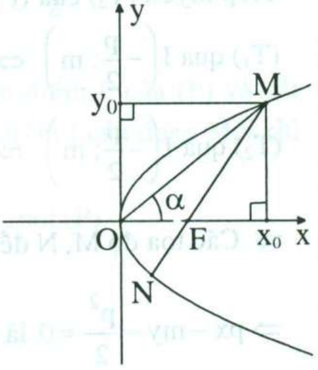
Bài 350. Trong mặt phẳng Oxy cho parabol $y^2 = 2px$ $(p > 0)$. Đường thẳng d qua tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại M, N. Gọi $(Ox, OM) = \alpha$ $(0 \le \alpha \le 2\pi)$.

a. Tính FM, FN theo p, α.

b. Chứng minh $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FN}$ không đổi khi d quay quanh F.

c. Chứng minh tích FM.FN nhỏ nhất khi d vuông góc với Ox.

Giải



a. $F\left(\dfrac{p}{2};\ 0\right)$. Gọi $M(x_0;\ y_0)$ thì $y_0 = x_0.\tan\alpha$

$M \in (P) \Leftrightarrow {y_0}^2 = 2px_0 \Leftrightarrow {x_0}^2\tan^2\alpha = 2px_0$

$\Leftrightarrow x_0 = 2p.\cot^2\alpha \Rightarrow y_0 = 2p.\cot\alpha$

$\Rightarrow M(2p\cot^2\alpha;\ 2p\cot\alpha)$

Phương trình đường thẳng FM:

$$\frac{x - \frac{p}{2}}{2p\cot^2\alpha - \frac{p}{2}} = \frac{y}{2p\cot\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - \frac{p}{2}}{2p\left(\cot^2\alpha - \frac{1}{4}\right)} = \frac{y}{2p\cot\alpha} \Leftrightarrow x.\cot\alpha - \frac{p}{2}\cot\alpha = \left(\cot^2\alpha - \frac{1}{4}\right)y\ (*)$$

Thế $x = \dfrac{y^2}{2p}$ vào (*): $\dfrac{y^2}{2p}.\cot\alpha - \left(\cot^2\alpha - \dfrac{1}{4}\right).y - \dfrac{p}{2}.\cot\alpha = 0$

Phương trình này đã có một nghiệm $y_M = 2p.\cot\alpha$

$$y_M + y_N = \frac{\cot^2\alpha - \frac{1}{4}}{\frac{\cot\alpha}{2p}} = \frac{2p\left(\cot^2\alpha - \frac{1}{4}\right)}{\cot\alpha}$$

$$\Rightarrow y_N = \frac{2p\left(\cot^2\alpha - \frac{1}{4}\right)}{\cot\alpha} - 2p\cot\alpha = -\frac{p}{2\cot\alpha} \Rightarrow x_N = \frac{\frac{p^2}{4\cot^2\alpha}}{2p} = \frac{p}{8\cot^2\alpha}$$

$$\Rightarrow FM = x_M + \frac{p}{2} = 2p\cot^2\alpha + \frac{p}{2} = \frac{p}{2}\left(4\cot^2\alpha + 1\right)$$

$$FN = x_N + \frac{p}{2} = \frac{p}{8\cot^2\alpha} + \frac{p}{2} = \frac{p}{8}\left(\frac{4\cot^2\alpha + 1}{\cot^2\alpha}\right).$$

b. $$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{1}{\frac{p}{2}\left(4\cot^2\alpha + 1\right)} + \frac{1}{\frac{p}{8}\left(\frac{4\cot^2\alpha + 1}{\cot^2\alpha}\right)} = \frac{2}{p\left(4\cot^2\alpha + 1\right)} + \frac{8\cot^2\alpha}{p\left(4\cot^2\alpha + 1\right)}$$

$$= \frac{2\left(1 + 4\cot^2\alpha\right)}{p\left(4\cot^2\alpha + 1\right)} = \frac{2}{p}.$$

c. $$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{2}{p} \geq 2\sqrt{\frac{1}{FM.FN}} \Leftrightarrow \sqrt{FM.FN} \geq p \Leftrightarrow FM.FN \geq p^2$$

$$\Rightarrow \left(FM.FN\right)_{\min} = p^2 \Leftrightarrow FM = FN = p.$$

$\Leftrightarrow x_M = x_N = \frac{p}{2}$: lúc này MN ⊥ Ox tại F.

Bài 351. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y^2 = 2px$ ($p > 0$). Điểm M chạy trên (P) ($M \equiv O$). Gọi N, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox, Oy. Chứng minh:

a. Đường thẳng qua K và vuông góc với OM qua một điểm cố định.

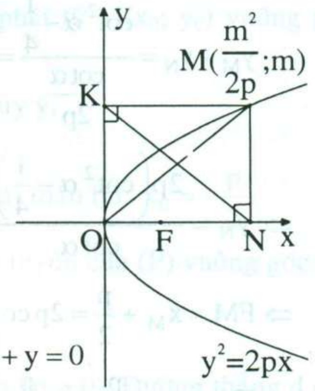
b. Đường thẳng qua K và vuông góc với NK qua một điểm cố định.

c. Đường thẳng NK tiếp xúc với một parabol cố định.

Giải

a. Gọi $M\left(\frac{m^2}{2p}; m\right) \Rightarrow N\left(\frac{m^2}{2p}; 0\right), K(0; m)$

$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{m^2}{2p}; m\right)$.



Phương trình đường thẳng d qua K và vuông góc với OM có dạng:

$$\frac{m^2}{2p}x+my+C=0$$

d qua K $\Leftrightarrow 0+m.m+C=0 \Leftrightarrow C=-m^2$

Phương trình d: $\frac{m^2}{2p}x+my-m^2=0$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{2p}x+y-m=0 \Leftrightarrow m\left(\frac{1}{2p}x-1\right)+y=0$$

$\Rightarrow$ Điểm A(2p; 0) thỏa phương trình d với mọi $m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ d luôn đi qua A(2p; 0).

b. $\overrightarrow{KN}=\left(\frac{m^2}{2p};-m\right)$.

Phương trình đường thẳng Δ qua K và vuông góc với NK có dạng:

$\frac{m^2}{2p}x-my+C=0$ qua K $\Leftrightarrow C=m^2$

$$\Delta:\quad \frac{m^2}{2p}x-my+m^2=0 \Leftrightarrow \frac{m}{2p}x-y+m=0$$

$$\Leftrightarrow m\left(\frac{1}{2p}x+1\right)-y=0$$

$\Rightarrow$ Điểm B(−2p; 0) thỏa phương trình Δ với mọi $m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Δ luôn đi qua B(−2p; 0)

c. Phương trình đường thẳng NK: $\frac{x}{\frac{m^2}{2p}}+\frac{y}{m}=1$

$$\Leftrightarrow 2px+my-m^2=0$$

Giả sử NK tiếp xúc với parabol $y^2=2qx$, thế thì:

$m^2.q=2(2p)(-m^2) \Leftrightarrow q=-4p$

$\Rightarrow$ NK luôn tiếp xúc với parabol $y^2=-8px$.

Bài 352. Cho parabol (P) $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ có tiêu điểm F. Điểm M di động trên (P), tiếp tuyến d của (P) tại M cắt Oy tại N.

a. Chứng minh $FN \perp MN$ và $\dfrac{FN^2}{FM}$ không đổi.

b. Gọi Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với d, K là hình chiếu vuông góc của F trên Δ. Chứng minh K chạy trên một parabol cố định

Giải

a. Gọi $M\left(\dfrac{m^2}{4a};m\right)$, $F(a;0)$, (P) có tham số tiêu $p = 2a$

Phương trình tiếp tuyến d của (P) tại M: $my = 2a\left(x + \dfrac{m^2}{4a}\right)$

$\Leftrightarrow 2ax - my + \dfrac{m^2}{2} = 0$

$\Rightarrow$ d cắt Oy tại $N\left(0;\dfrac{m}{2}\right)$

$\overrightarrow{FN} = \left(-a;\dfrac{m}{2}\right)$, $\overrightarrow{MN} = \left(-\dfrac{m^2}{4a};-\dfrac{m}{2}\right)$

$\overrightarrow{FN}.\overrightarrow{MN} = \dfrac{m^2}{4} - \dfrac{m^2}{4} = 0 \Leftrightarrow FN \perp MN$

$$\left.\begin{array}{l} FN^2 = a^2 + \dfrac{m^2}{4} = \dfrac{4a^2 + m^2}{4} \\ FM = \dfrac{m^2}{4a} + a = \dfrac{4a^2 + m^2}{4a} \end{array}\right\} \dfrac{FN^2}{FM} = \dfrac{(4a^2 + m^2)}{4}.\dfrac{4a}{(4a^2 + m^2)} = a$$

$\Rightarrow \dfrac{FN^2}{FM}$ không đổi.

b. Phương trình đường thẳng Δ có dạng $mx + 2ay + C = 0$

Δ qua M $\Leftrightarrow m.\dfrac{m^2}{4a} + 2a.m + C = 0 \Leftrightarrow C = -\left(\dfrac{m^3}{4a} + 2am\right)$

Phương trình Δ: $mx + 2ay - \left(\dfrac{m^3}{4a} + 2am\right) = 0$

Đường thẳng qua F và vuông góc với Δ có dạng:

$2ax - my + C = 0$ qua F $\Rightarrow 2a.a + C = 0 \Leftrightarrow C = -2a^2$.

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2ax - my = 2a^2 \\ mx + 2ay = \dfrac{m^3}{4a} + 2am \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4a^3 + \dfrac{m^4}{4a} + 2am^2}{4a^2 + m^2} \\ y = \dfrac{\dfrac{m^2}{2} + 2ma^2}{m^2 + 4a^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{16a^4 + m^4 + 8a^2m^2}{4a(4a^2 + m^2)} = \dfrac{(4a^2 + m^2)^2}{4a(4a^2 + m^2)} = \dfrac{4a^2 + m^2}{4a} = a + \dfrac{m^2}{4a} \\ y = \dfrac{m^3 + 4a^2m}{2(4a^2 + m^2)} = \dfrac{m(4a^2 + m^2)}{2(4a^2 + m^2)} = \dfrac{m}{2} \end{cases}$$

Vậy K(x; y) trong đó: $\begin{cases} x = a + \dfrac{m^2}{4a} & (1) \\ y = \dfrac{m}{2} & (2) \end{cases}$

Thế m = 2y từ (2) vào (1):

$$x = a + \frac{4y^2}{4a} = a + \frac{y^2}{a} \Leftrightarrow \frac{y^2}{a} = x - a \Leftrightarrow y^2 = a(x - a)$$

⇒ K chạy trên parabol $y^2 = a(x - a)$.

Bài 353. Cho họ đường thẳng D(p): $y = (2p + 1)x - p^2$ $(p \in \mathbb{R})$

a. Với $p \neq q$. Tìm giao điểm của D(p) và D(q).

b. Cho p cố định và $q \to p$. Tìm vị trí giới hạn của giao điểm trên. Từ kết quả đó hãy chứng tỏ rằng D(p) luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

c. Xác định p để khoảng cách từ điểm A(0; 1) đến D(p) nhỏ nhất.

Giải

a. D(p): $y = (2p + 1)x - p^2$

D(q): $y = (2q + 1)x - q^2$

Toạ độ giao điểm A của D(p) và D(q) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (2p+1)x - y = p^2 \\ (2q+1)x - y = q^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{q^2 - p^2}{2(q-p)} = \dfrac{q+p}{2} \\ y = \dfrac{(2p+1)q^2 - (2q+1)p^2 - p^2.2(q-p)}{2(q-p)} = \dfrac{p^2 + 2qp + q + p}{2} \end{cases}$$

Vậy $A\left(\dfrac{p+q}{2}; \dfrac{p^2 + 2pq + q + p}{2}\right)$.

b. Khi $q \to p$ thì $A\left(p; \frac{3}{2}p^2 + p\right)$

$\Rightarrow$ Khi p thay đổi, A chạy trên parabol $y = \frac{3}{2}x^2 + x$ và D(p) luôn tiếp xúc với parabol này.

c. $d(A; D(p)) = \frac{\left|1 + p^2\right|}{\sqrt{(2p+1)^2 + 1}} = \frac{p^2 + 1}{\sqrt{(2p+1)^2 + 1}}$

Xét hàm số $f(p) = \frac{p^2 + 1}{\sqrt{(2p+1)^2 + 1}}$ trên $\mathbb{R}$:

$$f'(p) = \frac{\sqrt{(2p+1)^2 + 1}.2p - (p^2 + 1).\frac{2(2p+1).2}{2\sqrt{(2p+1)^2 + 1}}}{(2p+1)^2 + 1}$$

$$= \frac{\left[(2p+1)^2 + 1\right]2p - (p^2 + 1)2(2p+1)}{\sqrt{\left[(2p+1)^2 + 1\right]^3}} = \frac{2(p+1)^2.(2p-1)}{\sqrt{\left[(2p+1)^2 + 1\right]^3}}$$

Bảng biến thiên:

p	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(p)$		$-$	0	$+$	
$f(p)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, kết luận: $d(A, D(p))_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ khi $p = \frac{1}{2}$.

Bài 354. Một điểm I gọi là một điểm trong của parabol (P) nếu mọi đường thẳng qua I và không cùng phương với trục của (P) đều cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Tìm điều kiện của x_0; y_0 để điểm $J(x_0; y_0)$ là một điểm trong của parabol.

a. (P): $y^2 = 2px$.　　　　b. (P): $x^2 = 2py$.

Giải

a. (P): $y^2 = 2px$

Gọi d: $y = k(x - x_0) + y_0 = kx + y_0 - kx_0$

Thế $x = \frac{y^2}{2p}$ vào phương trình d: $y = k.\frac{y^2}{2p} + y_0 - kx_0 \Leftrightarrow \frac{k}{2p}y^2 - y + y_0 - kx_0 = 0$

Phương trình này có $\Delta = 1 - 4\dfrac{k}{2p}(y_0 - kx_0) = \dfrac{2x_0}{p}k^2 - \dfrac{2y_0}{p}k + 1$ (*). Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta > 0\ \forall k$.

(*) là tam thức bậc hai của k có $\Delta' = \dfrac{y_0^2}{p^2} - \dfrac{2x_0}{p} = \dfrac{y_0^2 - 2px_0}{p^2}$

$$\Delta > 0\ \forall k \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow y_0^2 - 2px_0 < 0 \Leftrightarrow y_0^2 < 2px_0.$$

b. (P): $x^2 = 2py \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2}{2p}$ thế vào phương trình d:

$$\frac{x^2}{2p} = kx + y_0 - kx_0 \Leftrightarrow \frac{1}{2p}x^2 - kx + kx_0 - y_0 = 0$$

Phương trình này có $\Delta = k^2 - 4.\dfrac{1}{2p}(kx_0 - y_0) = k^2 - \dfrac{2x_0}{p}k + \dfrac{2}{p}.y_0$ (*')

(*') là tam thức bậc hai của k có: $\Delta' = \dfrac{x_0^2}{p^2} - \dfrac{2y_0}{p} = \dfrac{x_0^2 - 2py_0}{p^2}$ để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta > 0\ \forall k$.

$$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 - 2py_0}{p^2} < 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 2py_0 < 0 \Leftrightarrow x_0^2 < 2py_0$$

Bài 355. Xét diện tích của hình chắn bởi parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng có hệ số góc k, đi qua điểm trong $A(x_0; y_0)$ của parabol (P) (tức là điểm A có tọa độ thỏa mãn $x_0^2 < y_0$. Xác định k để diện tích ấy nhỏ nhất.

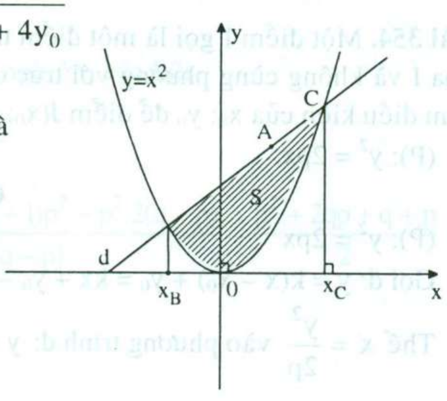
Giải

d là đường thẳng $y = k(x - x_0) + y_0$. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d: $x^2 = kx + y_0 - kx_0 \Leftrightarrow x^2 - kx + kx_0 - y_0 = 0$.

Phương trình này có $\Delta = k^2 - 4kx_0 + 4y_0 > 0$ (do A là điểm trong (P))

$x_B + x_C = k$; $x_C - x_B = \sqrt{k^2 - 4kx_0 + 4y_0}$

$x_B.x_C = kx_0 - y_0$



Hình phẳng bị giới hạn bởi d và (P) là hình có gạch chéo, diện tích

$$S = \int_{x_B}^{x_C}\left[(kx + y_0 - kx_0) - x^2\right]dx$$

$$= \left[\frac{k}{2}x^2 + (y_0 - kx_0)x - \frac{x^3}{3}\right]_{x_B}^{x_C}$$

$$= \frac{k}{2}\left(x_C^2 - x_B^2\right) + (y_0 - kx_0)(x_C - x_B) - \frac{1}{3}\left(x_C^3 - x_B^3\right)$$

$$= (x_C - x_B)\left[\frac{k}{2}(x_C + x_B) + y_0 - kx_0 - \frac{1}{3}\left[(x_C + x_B)^2 - x_Bx_C\right]\right]$$

$$= \frac{x_C - x_B}{6}\left(k^2 - 4kx_0 + 4y_0\right) = \frac{1}{6}\sqrt{(k^2 - 4kx_0 + 4y_0)^3}$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{\left[(k - 2x_0)^2 + 4(y_0 - x_0^2)\right]^3} \ge \frac{1}{6}\sqrt{4(y_0 - x_0^2)^3}$$

$\Rightarrow S_{\min} \Leftrightarrow k = 2x_0$.

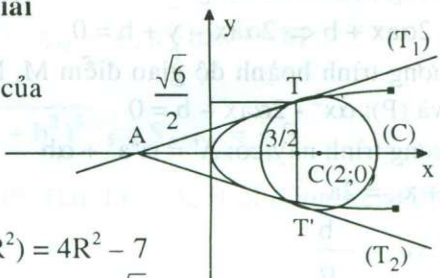
Bài 356. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y^2 = x$. Gọi (C) là đường tròn tâm C(2; 0), bán kính R.

a. Xác định R để đường tròn (C) tiếp xúc với (P). Xác định tọa độ các tiếp điểm T và T'.

b. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của (P) và (C) tại T và T'

c. Tính diện tích tam giác cong chắn bởi parabol (P) và hai tiếp tuyến nói trên.

Giải



a. Phương trình (C): $(x-2)^2 + y^2 = R^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P):

$(x-2)^2 + x = R^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 - R^2 = 0 \qquad (*)$

Phương trình này có: $\Delta = 9 - 4(4 - R^2) = 4R^2 - 7$

Để (C) và (P) tiếp xúc nhau thì $\Delta = 0 \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Khi $R = \frac{\sqrt{7}}{2}$ thì (*) có nghiệm kép $x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy $T\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right); T'\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

b. Phương trình tiếp tuyến chung của (P) và (C): ((P) có tham số tiêu $p = \frac{1}{2}$)

- Tại $T\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$: $\frac{\sqrt{6}}{2}y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow x + \frac{3}{2} = \sqrt{6}y \Leftrightarrow x - \sqrt{6}y + \frac{3}{2} = 0$.
- Tại $T'\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$: $-\frac{\sqrt{6}}{2}y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow x + \frac{3}{2} = -\sqrt{6}y \Leftrightarrow x + \sqrt{6}y + \frac{3}{2} = 0$.

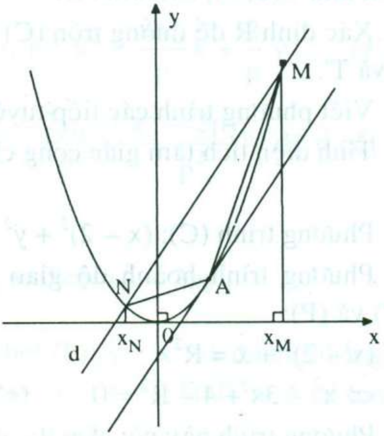
c. Do tính chất đối xứng (qua trục Ox), diện tích tam giác cong có gạch chéo là:

$$S = 2\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}\left[\sqrt{y} - \left(\sqrt{6}y - \frac{3}{2}\right)\right]dy = 2\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{6}}{2}y^2 + \frac{3}{2}y\right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$= \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ đơn vị diện tích.

Bài 357. A là một điểm tùy ý trên parabol (P): $y = \alpha x^2$ $(\alpha > 0)$. d là một đường thẳng song song với tiếp tuyến tại A của (P). Đường thẳng d cắt (P) tại M, N. Hãy so sánh diện tích tam giác AMN và diện tích của hình chắn phía trên bởi đường thẳng d và dưới bởi parabol (P).

Giải



$A(a; \alpha a^2)$

Tiếp tuyến tại A của (P) có hệ số góc:

$k = 2\alpha a$ $(y = y_a)$

Phương trình d có dạng:

$y = 2\alpha ax + b \Leftrightarrow 2\alpha ax - y + b = 0$

Phương trình hoành độ giao điểm M, N của d và (P): $\alpha x^2 - 2\alpha ax - b = 0$

Phương trình này có: $\Delta' = \alpha^2a^2 + \alpha b$

$x_M + x_N = 2a$

$x_M.x_N = -\frac{b}{\alpha}$

$$x_M - x_N = \frac{2\sqrt{\alpha^2a^2 + \alpha b}}{\alpha}$$

$$\left.\begin{aligned} y_M &= 2\alpha ax_M + b \\ y_N &= 2\alpha ax_N + b \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_M - y_N = 2\alpha a(x_M - x_N)$$

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(x_N - x_M)^2(1 + 4\alpha^2a^2)}$$

$$= (x_M - x_N).\sqrt{4\alpha^2a^2 + 1}.$$

$$d(A,d) = \frac{\left|2\alpha a^2 - \alpha a^2 + b\right|}{\sqrt{4\alpha^2a^2 + 1}} = \frac{\left|\alpha a^2 + b\right|}{\sqrt{4\alpha^2a^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.d(A,d) = \frac{1}{2}(x_M - x_N)\sqrt{4\alpha^2a^2 + 1}.\frac{\left|\alpha a^2 + b\right|}{\sqrt{4\alpha^2a^2 + 1}}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{2\sqrt{\alpha^2a^2+\alpha b}}{\alpha}.\sqrt{4\alpha^2a^2+1}.\frac{\left|\alpha a^2+b\right|}{\sqrt{4\alpha^2a^2+1}}=\frac{\sqrt{\alpha}.\sqrt{\alpha a^2+b}}{\alpha}.\left|\alpha a^2+b\right|=\frac{\sqrt{(\alpha a^2+b)^3}}{\sqrt{\alpha}}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (P):

$$S=\int_{x_N}^{x_M}\left[(2\alpha ax+b)-\alpha x^2\right]dx=\left[\alpha ax^2+bx-\frac{\alpha}{3}(x^3)\right]_{x_N}^{x_M}$$

$$=\alpha a.(x_M^2-x_N^2)+b(x_M-x_N)-\frac{\alpha}{3}\left(x_M^3-x_N^3\right)$$

$$=(x_M-x_N)\left[\alpha a(x_M+x_N)+b-\frac{\alpha}{3}(x_M^2+x_N^2+x_Mx_N)\right]$$

$$=(x_M-x_N)\left[\alpha a.2a+b-\frac{\alpha}{3}\left[(x_M+x_N)^2-x_Mx_N\right]\right]$$

$$=(x_M-x_N)\left(2\alpha a^2+b-\frac{\alpha}{3}\left(4a^2+\frac{b}{\alpha}\right)\right)$$

$$=(x_M-x_N)\left[2\alpha a^2+b-\frac{4}{3}\alpha a^2-\frac{b}{3}\right]=(x_M-x_N).\frac{2}{3}(\alpha a^2+b)$$

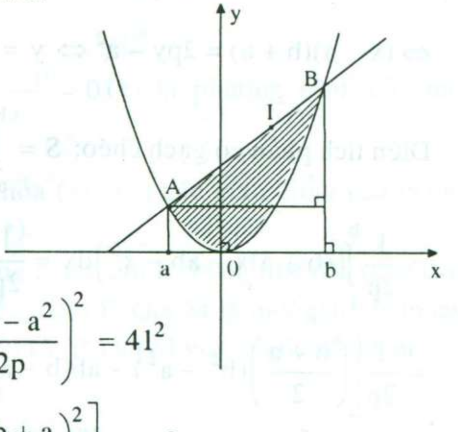
$$=\frac{2\sqrt{\alpha^2a^2+\alpha b}}{\alpha}.\frac{2}{3}(\alpha a^2+b)=\sqrt{(\alpha a^2+b^2)^3}\ \Rightarrow S_{AMN}=\frac{3}{4}S.$$

Bài 358. Cho parabol (P): $x^2=2py$ $(p>0)$. Hai điểm A, B di động trên (P) sao cho AB = 2l (l là hằng số dương).

a. Tìm quĩ tích trung điểm AB.

b. Hãy xác định vị trí của A, B sao cho diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi parabol (P) và cát tuyến AB đạt giá trị lớn nhất.

Giải



a. $A\left(a;\frac{a^2}{2p}\right)$, $B\left(b;\frac{b^2}{2p}\right)$

Gọi I(x; y) là trung điểm AB thì:

$$x=\frac{a+b}{2};\ y=\frac{a^2+b^2}{4p}$$

$$AB=2l\Leftrightarrow AB^2=4l^2\Leftrightarrow(b-a)^2+\left(\frac{b^2-a^2}{2p}\right)^2=4l^2$$

$$\Leftrightarrow(b-a)^2.\left[1+\left(\frac{b+a}{2p}\right)^2\right]=4l^2.$$

- Từ $x = \dfrac{a+b}{2} \Leftrightarrow a + b = 2x$

$$y = \frac{a^2+b^2}{4p} \Leftrightarrow y = \frac{1}{p}\left[\frac{(a+b)^2 - 2ab}{4}\right] = \frac{1}{4p}(4x^2 - 2ab) = \frac{1}{2p}(2x^2 - ab)\ (*)$$

- Từ $AB^2 = (b-a)^2\left[1 + \left(\dfrac{b+a}{2p}\right)^2\right] = 4l^2$

$$\Leftrightarrow \left[(b+a)^2 - 4ab\right]\left[1 + \left(\frac{x^2}{p^2}\right)\right] = 4l^2 \Leftrightarrow (4x^2 - 4ab)\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) = 4l^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - ab).\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) = l^2 \Leftrightarrow\ x^2 - ab = \frac{l^2}{1 + \dfrac{x^2}{p^2}} = \frac{p^2l^2}{x^2 + p^2}$$

$$\Leftrightarrow ab = x^2 - \frac{p^2l^2}{x^2 + p^2}$$

Thay vào (*): $y = \dfrac{1}{2p}\left(2x^2 - x^2 + \dfrac{p^2l^2}{x^2 + p^2}\right) = \dfrac{1}{2p}\left(x^2 + \dfrac{p^2l^2}{x^2 + p^2}\right)$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2p}\left(x^2 + \dfrac{p^2l^2}{x^2 + p^2}\right)$ là phương trình quĩ tích trung điểm I của AB

b. Phương trình đường thẳng AB: $\dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{y - \dfrac{a^2}{2p}}{\dfrac{b^2 - a^2}{2p}} = \dfrac{2py - a^2}{b^2 - a^2}$

$$\Leftrightarrow (x-a)(b+a) = 2py - a^2 \Leftrightarrow y = \frac{(b+a)x - ab}{2p}$$

Diện tích phần có gạch chéo: $S = \displaystyle\int_a^b\left(\left[\frac{(b+a)x - ab}{2p}\right] - \frac{x^2}{2p}\right)dx$

$$= \frac{1}{2p}\int_a^b\left((b+a)x - ab - x^2\right)dx = \frac{1}{2p}\left[\frac{b+a}{2}.x^2 - abx - \frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2p}\left[\left(\frac{b+a}{2}\right)(b^2 - a^2) - ab(b-a) - \frac{(b-a)(b^2 + a^2 + ab)}{3}\right]$$

$$= \frac{(b-a)}{2p}\left[\frac{(b+a)^2}{2} - ab - \frac{(b+a)^2 - ab}{3}\right]$$

$$= \frac{(b-a)}{2p}\left[\frac{3(b+a)^2 - 2(b+a)^2 - 6ab + 2ab}{6}\right] = \frac{b-a}{12p}\left[(b+a)^2 - 4ab\right]$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12p}$$

Rõ ràng $b - a \le 2l \Rightarrow S \le \dfrac{8l^3}{12p} \Rightarrow$ S đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{8l^3}{12p}$

Khi và chỉ khi $b - a = 2l$: lúc này AB // Ox và $x_A = -x_B = l$

$$\Rightarrow A\left(-l; \frac{l^2}{2p}\right),\ B\left(l; \frac{l^2}{2p}\right).$$

Bài 359. Cho hai parabol có hai trục đối xứng vuông góc và cắt nhau tại bốn điểm. Chứng minh bốn giao điểm của hai parabol này nằm trên một đường tròn.

Giải

Giả sử có hai parabol (P): $y = ax^2 + bx + C$ và $x = my^2 + ny + p$ (P')

Tọa độ 4 giao điểm của (P) và (P') là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} y = ax^2 + bx + C & (1) \\ x = my^2 + ny + p & (2) \end{cases}$ (P) có trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$, (P') có trục đối xứng $y = \dfrac{-n}{2m}$ vuông góc nhau).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} my = max^2 + mbx + mc \\ ax = may^2 + nay + ap \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} max^2 + mbx + mc - my = 0 \\ may^2 + nay + ap - ax = 0 \end{cases}$$

Cộng từng vế: $ma(x^2 + y^2) + (mb - a)x + (na - m)y + mc + ap = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \dfrac{mb - a}{ma}x + \dfrac{na - m}{ma}y + \dfrac{mc + ap}{ma} = 0\,(*)$ là phương trình của một đường tròn.

Tọa độ các giao điểm của (P) và (P') thỏa (*), nên các giao điểm của chúng nằm trên một đường tròn có phương trình (*).

Bài 360. Cho hai parabol (P) và (P') có chung tiêu điểm F chung trục đối xứng d và hai đỉnh A, A' của (P) và (P') nằm ở hai bên điểm F. Gọi M là một giao điểm của (P) và (P'). Chứng minh hai tiếp tuyến của (P) và (P') tại M vuông góc với nhau.

Giải

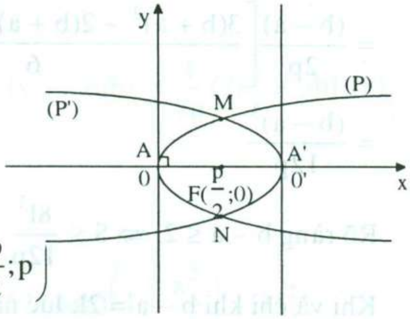
Trong hệ trục Oxy, (P) có phương trình $y^2 = 2px$

Tịnh tiến hệ trục Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OO'} = (p;0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = p + X \\ y = Y \end{cases}$

Trong hệ trục O'XY, (P') có phương trình $Y^2 = -2pX$, đưa về hệ Oxy: (P'):

$y^2 = -2p(x - p) \Leftrightarrow y^2 = -2px + 2p^2$

Tọa độ các giao điểm của (P) và (P') là nghiệm của hệ:



$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y^2 = -2px + 2p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{p}{2} \\ y = \pm p \end{cases} \text{ chọn } M\left(\frac{p}{2}; p\right)$$

Phương trình tiếp tuyến (T) của (P) tại M: $py = p\left(x + \dfrac{p}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x - y + \dfrac{p}{2} = 0$

Trong hệ O'XY điểm M có tọa độ $M\left(-\dfrac{p}{2}; p\right)$

Phương trình tiếp tuyến (T') của (P') tại M: $p.Y = -p\left(X + \dfrac{p}{2}\right)$

$\Leftrightarrow Y = -X - \dfrac{p^2}{2}$

$\Rightarrow$ (T') có hệ số góc $k_2 = -1$ (phép tịnh tiến bão toàn góc)

(T) có hệ số gics $k_1 = 1$

$\Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow$ (T) và (T') vuông góc nhau $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Bài 361. Cho parabol (P) có tiêu điểm F. Từ một điểm I vẽ hai tiếp tuyến đến (P) tiếp xúc (P) tại M, M'.

a. Chứng minh $FI^2 = FM.FM'$. b. Chứng minh $\dfrac{IM^2}{IM'^2} = \dfrac{FM}{FM'}$.

Giải

a. Giả sử (P) có phương trình $y^2 = 2px$ $(p > 0) \Rightarrow F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$

Gọi $I(x_0; y_0)$

$FI^2 = \left(x_0 - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y_0^2$

Phương trình tiếp tuyến (T_M) tại $M \in (P)$: $y_M y = p(x + x_M)$

Phương trình tiếp tuyến $(T_{M'})$ tại $M' \in (P)$: $y_{M'}.y = p(x + x_{M'})$

(T_M) qua $I(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_M y_0 = p(x_0 + x_M)$

$(T_{M'})$ qua $I(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_{M'}.y_0 = p(x_0 + x_{M'})$

⇒ Tọa độ M, M' cùng thỏa phương trình $yy_0 = p(x + x_0)$: đây là phương trình đường thẳng MM' ⇔ $y = \frac{p}{y_0}(x + x_0)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng MM' và parabol (P):

$$\left[\frac{p}{y_0}(x + x_0)\right]^2 = 2px \Leftrightarrow \frac{p}{y_0^2}(x^2 + 2x_0x + x_0)^2 = 2x$$

$$\Leftrightarrow px^2 + 2px_0x + px_0^2 = 2y_0^2x \Leftrightarrow px^2 + 2(px_0 - y_0^2)x + px_0^2 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm x_M, $x_{M'}$:

$$\begin{cases} x_M + x_{M'} = \dfrac{2(y_0^2 - px_0)}{p} \\ x_M.x_{M'} = x_0^2 \end{cases} \Rightarrow y_M = \frac{p}{y_0}\left(x_M + x_0\right) \Rightarrow y_{M'} = \frac{p}{y_0}(x_{M'} + x_0)$$

$$\Rightarrow y_M + y_{M'} = \frac{p}{y_0}(x_M + x_{M'} + 2x_0) = \frac{p}{y_0}\left[\frac{2y_0^2 - 2px_0 + 2px_0}{p}\right] = 2y_0$$

$$y_M.y_{M'} = \frac{p^2}{y_0^2}\left[x_M.x_{M'} + x_0(x_M + x_{M'}) + x_0^2\right]$$

$$= \frac{p^2}{y_0^2}\left[x_0^2 + \frac{2x_0y_0^2 - 2px_0^2}{p} + x_0^2\right] = 2px_0$$

$$FM = x_M + \frac{p}{2}$$

$$FM' = x_{M'} + \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow FM.FM' = x_M.x_{M'} + \frac{p}{2}(x_M + x_{M'}) + \frac{p^2}{4} = x_0^2 + \frac{p}{2}.\frac{2(y_0^2 - px_0)}{p} + \frac{p^2}{4}$$

$$= x_0^2 + y_0^2 - px_0 + \frac{p^2}{4} = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0^2 = FI^2 \Rightarrow \text{đpcm}$$

b. $IM^2 = (x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2$

$$= x_M^2 - 2x_Mx_0 + x_0^2 + y_M^2 - 2y_my_0 + y_0^2$$

$$= x_M^2 - 2x_Mx_0 + x_M.x_{M'} + 2px_M - 2p(x_M + x_0) + y_0^2$$

$$= x_M^2 - 2x_Mx_0 + x_M.x_{M'} - 2px_0 + y_0^2$$

$$= x_M^2 - 2x_Mx_0 + x_M.x_{M'} + y_0^2 - px_0 - px_0$$

$$= x_M^2 - 2x_0x_M + x_M.x_{M'} + \frac{p}{2}(x_M + x_{M'}) - px_0$$

$$= \left(x_M^2 + \frac{p}{2}x_M\right) + \left(x_M x_{M'} + \frac{p}{2}x_{M'}\right) - (2x_0x_M + px_0)$$

$$= x_M\left(x_M + \frac{p}{2}\right) + x_{M'}\left(x_M + \frac{p}{2}\right) - 2x_0\left(x_M + \frac{p}{2}\right)$$

$$= \left(x_M + \frac{p}{2}\right)(x_M + x_{M'} - 2x_0)$$

Tương tự: $IM'^2 = \left(x_{M'} + \frac{p}{2}\right)(x_M + x_{M'} - 2x_0)$

$$\Rightarrow \frac{IM^2}{IM'^2} = \frac{\left(x_M + \frac{p}{2}\right)(x_M + x_{M'} - 2x_0)}{\left(x_{M'} + \frac{p}{2}\right)(x_M + x_{M'} - 2x_0)} = \frac{x_M + \frac{p}{2}}{x_{M'} + \frac{p}{2}} = \frac{FM}{FM'}$$

⇒ điều phải chứng minh.

Bài 362. Cho parabol (P): $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ và điểm $I(x_0; y_0)$. Đường thẳng lưu động d qua I cắt (P) tại hai điểm M, N. Chứng minh trung điểm J của đoạn MN chạy trên một parabol cố định.

Giải

Đường thẳng d có phương trình $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = kx + y_0 - kx_0$.

Từ $y^2 = 2px \Leftrightarrow x = \dfrac{y^2}{2p}$

Phương trình tung độ giao điểm của d và (P):

$$y = k.\frac{y^2}{2p} + y_0 - kx_0 \Leftrightarrow \frac{k}{2p}y^2 - y + y_0 - kx_0 = 0$$

Phương trình có hai nghiệm y_M, y_N (do d cắt (P) tại M, N)

$$y_M + y_N = \frac{1}{\frac{k}{2p}} = \frac{2p}{k};\ y_M.y_N = \frac{y_0 - kx_0}{\frac{k}{2p}} = \frac{2p(y_0 - kx_0)}{k}$$

$$x_M = \frac{y_M^2}{2p};\ x_N = \frac{y_N^2}{2p}$$

$$x_M + x_N = \frac{y_M^2 + y_N^2}{2p} = \frac{(y_M + y_N)^2 - 2y_M.y_N}{2p} = \frac{\left(\frac{2p}{k}\right)^2 - \frac{4p(y_0 - kx_0)}{k}}{2p}$$

Gọi J(x; y) là trung điểm MN thì:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_M + x_N}{2} = \dfrac{4\left(\dfrac{p}{k}\right)^2}{4p} - \dfrac{y_0 - kx_0}{k} & (1) \\ y = \dfrac{y_M + y_N}{2} = \dfrac{p}{k} & (2) \end{cases}$$

Thay $y = \dfrac{p}{k} \Leftrightarrow k = \dfrac{p}{y}$ từ (2) vào (1)

$$x = \frac{y^2}{p} - \frac{y_0}{k} + x_0 = \frac{y^2}{p} - \frac{y_0 y}{p} + x_0$$

$$\Leftrightarrow x - x_0 = \frac{y^2 - y_0 y}{p} \Leftrightarrow p(x - x_0) = \left(y - \frac{y_0}{2}\right)^2 - \frac{y_0^2}{4}$$

$\Leftrightarrow \left(y - \dfrac{y_0}{2}\right)^2 = p\left(x - x_0 + \dfrac{y_0^2}{4p}\right)$ là phương trình tập hợp điểm J.

Bài 363. Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y^2 = 2px$ tiêu điểm F và đường thẳng (D) qua O và có hệ số góc $m \neq 0$ cắt (D) tại O và M. Tiếp tuyến d của (P) tại M cắt Oy tại I. (D') là đường thẳng qua O và vuông góc với d. (D') cắt d tại N' và cắt (P) tại O, M'. Tiếp tuyến d' của (P) tại M' cắt Oy tại I' và cắt (D) tại N.

a. Gọi t là hệ số góc của tiếp tuyến d. chứng minh m = 2t

b. Gọi m' là hệ số góc của đường thẳng (D'). Chứng minh m.m' = –2 và (D) ⊥ d'.

c. Chứng minh khi m thay đổi:

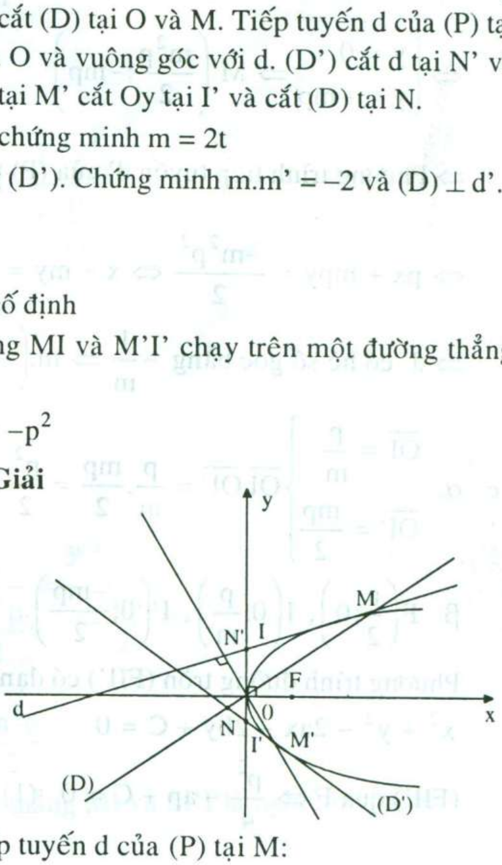
α. Tích $\overline{OI}.\overline{OI'}$ không đổi

β. Đường tròn (FII') qua hai điểm cố định

γ. Giao điểm H của hai đường thẳng MI và M'I' chạy trên một đường thẳng cố định.

d. Chứng minh $\overline{OM}.\overline{ON} = \overline{OM'}.\overline{ON'} = -p^2$

Giải



a. Phương trình (D): y = mx

Phương trình tung độ giao điểm M:

$$y^2 = 2yx \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2p}$$

$$y = m.\frac{y^2}{2p} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{2p}{m} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{2p}{m^2}; \dfrac{2p}{m}\right) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến d của (P) tại M:

$$\frac{2p}{m}y = p\left(x + \frac{2p}{m^2}\right) \Leftrightarrow px - \frac{2p}{m}y = \frac{-2p^2}{m^2} \quad (d)$$

d cắt Oy tại $I\left(0;\frac{2p}{m}\right)$

(D’)vuông góc với d nên phương trình có dạng: $\frac{2p}{m}x + py + C = 0$ (D’) qua O $\Leftrightarrow$ C = 0: phương trình (D’): $\frac{2p}{m}x + py = 0$

d có hệ số góc $t = \frac{-p}{\frac{-2p}{m}} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow m = 2t \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

b. (D’) có hệ số góc $m' = \frac{-\frac{2p}{m}}{p} = \frac{-2}{m} \Leftrightarrow m.m' = -2$

Phương trình tung độ giao điểm M’ $\frac{2p}{m}.\frac{y^2}{2p} + py = 0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{m} + py = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -mp \end{array}\right. \Rightarrow M'\left(\frac{m^2p}{2};-mp\right)$$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến d’ của (P) tại M’: $-mp.y = p\left(x + \frac{m^2p}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow px + mpy = \frac{-m^2p^2}{2} \Leftrightarrow x + my = -\frac{m^2p}{2} \Rightarrow I'\left(0;-\frac{mp}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ d’ có hệ số góc bằng $-\frac{1}{m} \Rightarrow m.\left(-\frac{1}{m}\right) = -1 \Leftrightarrow (D) \perp d'$

c. α. $\left.\begin{array}{l} \overline{OI} = \frac{p}{m} \\ \overline{OI'} = \frac{mp}{2} \end{array}\right\} \overline{OI}.\overline{OI'} = \frac{p}{m}.\frac{mp}{2} = \frac{p^2}{2}.$

β. $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, $I\left(0;\frac{p}{m}\right)$, $I'\left(0;\frac{-mp}{2}\right)$.

Phương trình đường tròn (FII’) có dạng:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + C = 0$

(FII’) qua F $\Leftrightarrow \frac{p^2}{4} - ap + C = 0 \quad (1)$

(FII') qua I ⇔ $\frac{p^2}{m^2} - \frac{2bp}{m} + C = 0$ (2)

(FII') qua I' ⇔ $\frac{m^2p^2}{4} + 2b.\frac{mp}{2} + C = 0$ (3)

Hệ (1), (2), (3) cho $a = -\frac{p}{4}$, $b = \frac{2p - m^2p}{4m}$, $c = -\frac{p^2}{2}$

⇒ Đường tròn (FII') có phương trình:

$$x^2 + y^2 + \frac{p}{2}x - \frac{2p - m^2p}{2m}y - \frac{p^2}{2} = 0 \qquad (*)$$

(*) Thỏa với mọi $m \in \mathbb{R}$ ⇔ $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + \frac{p}{2}x - \frac{p^2}{2} = 0 \end{cases}$

⇔ $\begin{cases} y = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{p}{2} \\ x = -p \end{array}\right. \end{cases}$ ⇒ Đường tròn (FII') luôn đi qua $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và K(−p; 0).

γ. $M\left(\frac{2p}{m^2};\frac{2p}{m}\right)$, $I\left(0;\frac{p}{m}\right)$.

Phương trình đường thẳng MI: $\frac{x}{\frac{2p}{m^2}} = \frac{y - \frac{p}{m}}{\frac{p}{m}}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{\frac{2}{m}} = \frac{y - \frac{p}{m}}{1} \Leftrightarrow x - \frac{2}{m}y = \frac{-2p}{m^2}$

- $M'\left(\frac{m^2p}{2};-mp\right)$; $I'\left(0;-\frac{mp}{2}\right)$

Phương trình đường thẳng M'I': $\frac{x}{\frac{m^2p}{2}} = \frac{y + \frac{mp}{2}}{-\frac{mp}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{m} = \frac{y + \frac{mp}{2}}{-1} \Leftrightarrow x + my = -\frac{m^2p}{2}$

Tọa độ giao điểm H của hai đường thẳng MI và M'I'là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - \dfrac{2}{m}y = -\dfrac{2p}{m^2} \\ x + my = -\dfrac{m^2p}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-\dfrac{2p}{m} - mp}{m + \dfrac{2}{m}} = -p \\ y = \dfrac{\dfrac{-m^2p}{2} + \dfrac{2p}{m^2}}{m + \dfrac{2}{m}} = \dfrac{p(2 - m^2)}{2m} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow H\left(-p; \dfrac{p(2 - m^2)}{2m}\right)$

$\Rightarrow$ H chạy trên đường thẳng $x = -p$ cố định.

d. $M\left(\dfrac{2p}{m^2}; \dfrac{2p}{m}\right)$ $(D) \cap d' = N$

Tọa độ N là nghiệm của hệ: $\begin{cases} mx - y = 0 \\ px + mpy = \dfrac{-m^2p^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-\dfrac{m^2p^2}{2}}{p(m^2 + 1)} \\ y = \dfrac{-m^3p^2}{p(m^2 + 1)} \end{cases}$

$\Rightarrow N\left(\dfrac{-m^2p^2}{p(m^2 + 1)}; \dfrac{-m^3p^2}{p(m^2 + 1)}\right)$

$\overline{OM} = \sqrt{x_M^2 + m^2x_M^2} = |x_M|.\sqrt{m^2 + 1}$

$\overline{ON} = \sqrt{x_N^2 + m^2x_N^2} = |x_N|.\sqrt{m^2 + 1}$

$\Rightarrow \overline{OM}.\overline{ON} = -(m^2 + 1).|x_M.x_N| = -\left(m^2 + 1\right).\left|\dfrac{2p}{m^2}\right|.\left|\dfrac{-m^2p^2}{p(m^2 + 1)}\right| = -p^2.$

- $M'\left(\dfrac{m^2p}{2}; -mp\right)$

  $(D') \cap d = N'$:

  Tọa độ N' là nghiệm của hệ: $\begin{cases} px - \dfrac{2p}{m}y = \dfrac{-2p^2}{m^2} \\ \dfrac{2x}{m} + y = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-\dfrac{2p^2}{m^2}}{p + \dfrac{4p}{m^2}} = \dfrac{-2p}{m^2+4} \\ y = \dfrac{\dfrac{4p^2}{m^3}}{p + \dfrac{4p}{m^2}} = \dfrac{4pm}{m^2+4} \end{cases} \Rightarrow N'\left(-\dfrac{2p}{m^2+4}; \dfrac{4pm}{m^2+4}\right)$$

$$\overline{OM'} = \sqrt{x_M^2 + \frac{4x_{M'}^2}{m^2}} = |x_{M'}|.\sqrt{\frac{m^2+4}{m^2}}$$

$$\overline{ON'} = \sqrt{x_{N'}^2 + \frac{4x_{N'}^2}{m^2}} = |x_{N'}|.\sqrt{\frac{m^2+4}{m^2}}$$

$$\Rightarrow \overline{OM'}.\overline{ON'} = -|x_{M'}.x_{N'}|.\left(\frac{m^2+4}{m^2}\right) = -\left|\frac{m^2p}{2}.\frac{2p}{m^2+4}\right|.\left(\frac{m^2+4}{m^2}\right) = -p^2.$$

$$\Rightarrow \overline{OM}.\overline{ON} = \overline{OM'}.\overline{ON'} = -p^2.$$

♦ Lời bình: Bài tập đề cập đến một số tính chất của parabol: hãy suy nghĩ, sáng tạo để có thể phát hiện ra những tính chất khác lạ nữa của parabol.

Bài 364. Cho parabol (P): $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$.

Các điểm A, B, C phân biệt nằm trên (P) có tung độ lần lượt là $2at_1$, $2at_2$, $2at_3$. Gọi d_1, d_2, d_3 là các tiếp tuyến của (P) tại A, B, C. Giả sử $d_2 \cap d_3 = A'$, $d_3 \cap d_1 = B'$, $d_1 \cap d_2 = C'$.

a. Tìm tọa độ các điểm A', B', C'.

b. Chứng minh trực tâm H của tam giác A'B'C' nằm trên đường chuẩn Δ của parabol (P) và tâm tọa độ của H.

c. Chứng minh $S_{ABC} = 2S_{A'B'C'}$.

d. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'. Suy ra tiêu điểm F của (P) nằm trên đường tròn này.

Giải

a. (P): $y^2 = 4ax$ có $p = 2a$; $F(a; 0)$, đường chuẩn $x = -a$.

$A \in (P) \Leftrightarrow (2at_1)^2 = 4a.x_A \Rightarrow x_A = a\,t_1^2 \Rightarrow A(at_1^2; 2at_1)$

Tương tự $B\left(at_2^2; 2at_2\right)$; $C\left(at_3^2; 2at_3\right)$

Phương trình tiếp tuyến d_1: $2at_1.y = 2a(x + at_1^2) \Leftrightarrow x - t_1y = -at_1^2$

Tương tự có tiếp tuyến d_2: $x - A_2 = -at_2^2$

d_3: $x - t_3y = -at_3^2$

$d_2 \cap d_3 = A'$: tọa độ A' là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - t_2y = -at_2^2 \\ x - t_3y = -at_3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{at_2^2t_3 - at_3^2.t_2}{t_2 - t_3} = \dfrac{at_2t_3(t_2 - t_3)}{t_2 - t_3} = at_2t_3 \\ y = \dfrac{a(t_2^2 - t_3^2)}{t_2 - t_3} = a(t_2 + t_3) \end{cases}$$

$\Rightarrow A'\left(at_2t_3; a(t_2 + t_3)\right)$

Tương tự: $B'\left(at_1t_3; a(t_1 + t_3)\right)$; $C'\left(at_1t_2; a(t_1 + t_2)\right)$.

b. $\overrightarrow{B'C'} = \left(at_1(t_2 - t_3); a(t_2 - t_3)\right)$ cùng phương với $\overrightarrow{a'} = (t_1;1)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường cao A'H có dạng: $t_1x + y = C = 0$

A'H qua A' $\Leftrightarrow t_1at_2t_3 + a(t_2 + t_3) + C = 0$

$\Leftrightarrow C = -at_1t_2t_3 - a(t_2 + t_3)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường cao A'H: $t_1x + y = at_1t_2t_3 + a(t_2 + t_3)$

$\overrightarrow{A'C'} = \left(at_2(t_1 - t_3); a(t_1 - t_3)\right)$ cùng phương với $\overrightarrow{b'} = (t_2;1)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường cao B'H có dạng: $t_2x + y + C = 0$

B'H qua B' $\Leftrightarrow t_2.at_1t_3 + a(t_1 + t_3) + C = 0 \Leftrightarrow C = -at_1t_2t_3 - a(t_1 + t_3)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường cao B'H: $t_2x + y = at_1t_2t_3 + a(t_1 + t_3)$

Tọa độ trực tâm H của tam giác A'B'C' là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} t_1x + y = at_1t_2t_3 + a(t_2 + t_3) \\ t_2x + y = at_1t_2t_3 + a(t_1 + t_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a(t_2 - t_1)}{(t_1 - t_2)} = -a \\ y = \dfrac{a\left[t_1^2t_2t_3 - t_2^2t_1t_3 + t_1(t_1 + t_3) - t_2(t_2 + t_3)\right]}{(t_1 - t_2)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = \dfrac{a\left[t_1t_2t_3(t_1 - t_2) + (t_1^2 - t_2^2) + t_3(t_1 - t_2)\right]}{t_1 - t_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -a \\ y = a\left[t_1t_2t_3 + t_1 + t_2 + t_3\right] \end{cases} \Rightarrow H \in \Delta \text{ và } H(-a; a(t_1t_2t_3 + t_1 + t_2 + t_3))$$

c. $A(at_1^2; 2at_1)$; $B(at_2^2; 2at_2)$; $C(at_3^2; 2at_3)$

$$BC = \sqrt{\left[a(t_3^2 - t_2^2)\right]^2 + \left[2a(t_3 - t_2)\right]^2}$$

$$= \sqrt{a^2(t_3 - t_2)^2(t_3 + t_2)^2 + 4(t_3 - t_2)^2} = a\left|t_3 - t_2\right|\sqrt{(t_3 + t_2)^2 + 4}$$

Phương trình đường thẳng BC:

$$\frac{x-at_2^2}{a(t_3^2-t_2^2)}=\frac{y-2at_2}{2a(t_3-t_2)} \Leftrightarrow \frac{x-at_2^2}{a(t_3+t_2)(t_3-t_2)}=\frac{y-2at_2}{2a(t_3-t_2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-at_2^2}{(t_3+t_2)}=\frac{y-2at_2}{2} \Leftrightarrow 2x-2at_2^2=(t_3+t_2).y-2at_2t_3-2at_2^2$$

$\Leftrightarrow 2x-(t_3+t_2).y+2at_2t_3=0$

$$d(A, BC)=\frac{\left|2at_1^2-(t_3+t_2).2at_1+2at_2t_3\right|}{\sqrt{4+(t_2+t_3)^2}}=\frac{2a\left|t_1^2-t_1(t_3+t_2)+t_2t_3\right|}{\sqrt{4+(t_2+t_3)^2}}$$

$A'\left(at_2t_3;a(t_2+t_3)\right)$; $B'\left(at_1t_3;a(t_1+t_3)\right)$; $C'\left(at_1t_2;a(t_1+t_2)\right)$

$$B'C'=\sqrt{\left[at_1(t_2-t_3)\right]^2+\left[a(t_2-t_3)\right]^2}=a\left|t_2-t_3\right|.\sqrt{t_1^2+1}$$

Phương trình đường thẳng B'C':

$$\frac{x-at_1t_3}{at_1(t_2-t_3)}=\frac{y-a(t_1+t_3)}{a(t_2-t_3)} \Leftrightarrow \frac{x-at_1t_3}{t_1}=y-a(t_1+t_3)$$

$\Leftrightarrow x-at_1t_3=t_1.y-a(t_1+t_3).t_1=t_1y-at_1^2-at_1t_3$

$\Leftrightarrow x-t_1y+at_1^2=0$

$$d(A';B'C')=\frac{\left|at_2t_3-t_1.a(t_2+t_3)+at_1^2\right|}{\sqrt{1+t_1^2}}$$

$$S_{A'B'C'}=\frac{1}{2}B'C'.d(A',B'C')=\frac{1}{2}a\left|t_2-t_3\right|.\sqrt{t_1^2+1}\,\frac{a\left|t_1^2-t_1(t_3+t_2)+t_2t_3\right|}{\sqrt{1+t_1^2}}$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left|t_2-t_3\right|.\sqrt{\left(t_1^2-t_1(t_3+t_2)+t_2t_3\right)^2}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.d(A,BC)=\frac{1}{2}a\left|t_3-t_2\right|\sqrt{(t_3+t_2)^2+4}.\frac{2a\left|t_1^2-t_1(t_3+t_2)+t_2t_3\right|}{\sqrt{(t_3+t_2)^2+4}}$$

$$=a^2\left|t_2-t_3\right|.\sqrt{\left(t_1^2-t_1(t_3+t_2)+t_2t_3\right)^2} \Rightarrow S_{ABC}=2.S_{A'B'C'}$$

d. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C' có dạng:

(C): $x^2+y^2-2mx-2ny+C=0$

$A'\in(C) \Leftrightarrow a^2t_2^2t_3^2+a^2(t_2+t_3)^2-2mat_2t_3-2na(t_2+t_3)+C=0$ (1)

$B'\in(C) \Leftrightarrow a^2t_1^2t_3^2+a^2(t_1+t_3)^2-2mat_1t_3-2na(t_1+t_3)+C=0$ (2)

$C'\in(C) \Leftrightarrow a^2t_1^2t_2^2+a^2(t_1+t_2)^2-2mat_1t_2-2n.a(t_1+t_2)+C=0$ (3)

Trừ từng vế (1) và (2) được:

$$a^2(t_2^2t_3^2 - t_1^2t_3^2) + a^2\left[(t_2 + t_3)^2 - (t_1 + t_3)^2\right] - 2am(t_2t_3 - t_1t_3) - 2am(t_2 - t_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow at_3^2(t_2 + t_1) + a(t_1 + t_2 + 2t_3) - 2mt_3 - 2n = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t_3m + 2n = at_3^2(t_2 + t_1) + a(t_1 + t_2 + 2t_3) \quad (4)$$

Tương tự trừ từng vế (2) và (3) được:

$$2t_1m + 2n = at_1^2(t_3 + t_2) + a(t_2 + t_3 + 2t_1) \quad (5)$$

Giải hệ (4) và (5) theo hai ẩn số m, n được: $\begin{cases} m = \dfrac{a}{2}(t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 + 1) \\ n = \dfrac{a}{2}(t_1 + t_2 + t_3 - t_1t_2t_3) \end{cases}$

Thế m, n tìm được vào (1) được $c = a^2(t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3)$

Phương trình đường tròn A'B'C':

$$x^2 + y^2 - a(t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 + 1)x - a(t_1 + t_2 + t_3 - t_1t_2t_3)y + a^2(t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3)$$

Thế tọa độ F(a; 0) vào phương trình đường tròn A'B'C':

$$a^2 - a^2(t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 + 1) + a^2(t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3)$$

$$= a^2(1 - t_1t_2 + t_1t_3 - t_2t_3 - 1 + t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3) = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 365. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có các đỉnh nằm trên parabol (P) $y = x^2$. Gọi a, b, c là hoành độ các đỉnh A, B, C.

a. Viết phương trình đường thẳng BC và phương trình tiếp tuyến tại A của (P.)

b. Giả sử A cố định; B, C thay đổi sao cho tam giác ABC vuông tại A.

α. Chứng minh cạnh BC luôn đi qua điểm cố định D.

β. Viết phương trình đường tròn đường kính AD. Chứng minh đường tròn này tiếp xúc với (P). Xác định tọa độ các tiếp điểm.

Giải

$A(a; a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c; c^2)$, (P) $x^2 = y$ có $p = \dfrac{1}{2}$

a. Phương trình đường thẳng BC: $\dfrac{x - b}{c - b} = \dfrac{y - b^2}{c^2 - b^2}$

$$\Leftrightarrow x - b = \frac{y - b^2}{c + b} \Leftrightarrow (b + c)x - bc - b^2 = y - b^2$$

$$\Leftrightarrow (b + c)x - y - bc = 0$$

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại A: $ax = \dfrac{1}{2}(y + a^2) \Leftrightarrow 2ax - y - a^2 = 0$

b. $\overrightarrow{AB} = (b - a; b^2 - a^2)$ cùng phương với $\vec{C} = (1; a + b)$

$\overrightarrow{AC} = (c - a; c^2 - a^2)$ cùng phương với $\vec{b} = (1; a + c)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \vec{c}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 1 + (a + b)(a + c) = 0$

$\Leftrightarrow 1 + a^2 + a(b + c) + bc = 0 \Leftrightarrow bc = -1 - a^2 - a(b + c)$

Thế vào phương trình đường thẳng BC:

α. $(b + c)x - y + 1 + a^2 + a(b + c) = 0 \Leftrightarrow (b + c)(x + a) = y - (1 + a^2)$ thỏa với mọi b, c khi $\begin{cases} x + a = 0 \\ y - (1 + a^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = 1 + a^2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ BC luôn qua $D(-a; a^2 + 1)$ với mọi giá trị của b, c.

β. Gọi I là trung điểm AD: $I\left(0; a^2 + \dfrac{1}{2}\right)$

$AD = \sqrt{(-2a)^2 + 1^2} = \sqrt{4a^2 + 1} \Rightarrow \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{\sqrt{4a^2 + 1}}{2}$

Phương trình đường tròn đường kính AD.

$$x^2 + \left(y - a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4a^2 + 1}{4} = a^2 + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + a^4 + \frac{1}{4} - 2a^2y - y + a^2 = a^2 + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - y(2a^2 + 1) + a^4 = 0$$

Thay $x^2 = y$ được phương trình tung độ giao điểm của (C) và (P):

$$y + y^2 - y(2a^2 + 1) + a^4 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2a^2y + a^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - a^2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = a^2 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a$$

Vậy có 2 tiếp điểm: $A(a; a^2)$; $E(-a; a^2)$.

Bài 366. Cho parabol (P): $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ có tiêu điểm F. Giả sử các pháp tuyến của (P) tại các điểm M, N, K đồng quy tại I.

Chứng minh $FM.FN.FK = a.FI^2$.

Giải

(P) có tham số tiêu $p = 2a \Rightarrow F(a; 0)$

Gọi $M\left(\dfrac{m^2}{4a}; m\right)$, $N\left(\dfrac{n^2}{4a}; n\right)$; $K\left(\dfrac{k^2}{4a}; k\right)$

Tiếp tuyến tại M của (P): $my = 2a\left(x + \dfrac{m^2}{4a}\right) \Leftrightarrow 2ax - my + \dfrac{m^2}{2} = 0$

$\Rightarrow$ Pháp tuyến tại M của (P) có dạng: $mx + 2ay + C = 0$

Pháp tuyến qua M $\Leftrightarrow \dfrac{m.m^2}{4a} + 2am + C = 0 \Leftrightarrow C = \dfrac{-m^3}{4a} - 2am$

$\Rightarrow$ Phương trình pháp tuyến tại M của (P): $mx + 2ay - \dfrac{m^3}{4a} - 2am = 0$ (pm)

Tương tự, pháp tuyến tại N: $nx + 2ay - \dfrac{n^3}{4a} - 2an = 0$ (pn)

Pháp tuyến tại K: $kx + 2ay - \dfrac{k^3}{4a} - 2ak = 0$ (pk)

Gọi I là giao điểm của (pm) và (pn). Tọa độ I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} mx + 2ay = \dfrac{m^3}{4a} + 2am \\ nx + 2ay = \dfrac{n^3}{4a} + 2an \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2a\left[\dfrac{m^3}{4a} + 2am - \dfrac{n^3}{4a} - 2am\right]}{2a(m-n)} \\ y = \dfrac{m\left(\dfrac{n^3}{4a} + 2an\right) - n\left(\dfrac{m^3}{4a} + 2am\right)}{2a(m-n)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m^2 + n^2 + mn}{4a} + 2a \\ y = \dfrac{-mn(m+n)}{8a^2} \end{cases}. \text{ Vậy } I\left(\dfrac{m^2 + n^2 + mn}{4a} + 2a; \dfrac{-mn(m+n)}{8a^2}\right)$$

Nếu các pháp tuyến (pm), (pn), (pk) đồng qui thì $I \in$ (pk)

$$\Leftrightarrow k\left(\frac{m^2 + n^2 + mn}{4a} + 2a\right) + 2a\left(\frac{-mn(m+n)}{8a^2}\right) - \frac{k^3}{4a} - 2ak = 0$$

$$\Leftrightarrow k\left(m^2 + n^2 + mn\right) - mn(m+n) - k^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow k\left((m+n)^2 - mn\right) - mn(m+n) - k^3 = 0$$

Đặt: $\begin{cases} m + n = X \\ m.n = P \end{cases}$

Thì $k(X^2 - P) - PX - k^3 = 0 \Leftrightarrow kX^2 - PX - (Pk + k^3) = 0$

Phương trình bậc hai của X này có $\Delta = P^2 + 4k^2P + 4k^4 = (2k^2 + P)^2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} X = \dfrac{P + 2k^2 + P}{2k} = \dfrac{P}{k} + k \\ X = \dfrac{P - 2k^2 - P}{2k} = -k \end{array}\right.$$

- Nếu $m + n = \dfrac{P}{k} + k \Leftrightarrow k^2 - (m + n)k + m.n = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = m \\ k = n \end{array}\right.$ loại, vì $M \neq N \neq K$

- Nếu $m + n = -k \Leftrightarrow k^2 = (m + n)^2$

$$FM = \frac{m^2}{4a} + a$$

$$FN = \frac{n^2}{4a} + a$$

$$FK = \frac{k^2}{4a} + a$$

$$\Rightarrow FM.FN.FK = \left(\frac{m^2}{4a} + a\right)\left(\frac{n^2}{4a} + a\right)\left(\frac{k^2}{4a} + a\right)$$

$$= \left(\frac{m^2 + 4a^2}{4a}\right)\left(\frac{n^2 + 4a^2}{4a}\right)\left[\frac{(m + n)^2}{4a} + 4a^2\right]$$

$$= \frac{(m^2n^2 + 4a^2m^2 + 4a^2n^2 + 16a^4)}{16a^2}.\frac{\left[(m + n)^2 + 4a^2\right]}{4a}$$

- $F(a; 0)$, $I\left(\dfrac{m^2 + n^2 + mn}{4a} + 2a; \dfrac{-mn(m + n)}{8a^2}\right)$

$$FI^2 = \left(\frac{m^2 + n^2 + mn}{4a} + a\right)^2 + \frac{m^2n^2(m + n)^2}{64a^2} = \left(\frac{m^2 + n^2 + mn + 4a^2}{4a}\right)^2 + \frac{m^2n^2(m + n)^2}{64a^4}$$

$$= \frac{(m^2 + n^2 + mn)^2 + 8a^2(m^2 + n^2 + mn) + 16a^4}{16a^2} + \frac{m^2n^2(m + n)^2}{64a^4}$$

$$= \frac{4a^2(m^2 + n^2 + mn)^2 + 32a^4(m^2 + n^2 + mn) + m^2n^2(m + n)^2 + 64a^6}{64a^4}$$

$$\Rightarrow a.FI^2 = \frac{m^2n^2(m + n)^2 + 4a^2(m^2 + n^2 + mn)^2 + 32a^4(m^2 + n^2 + mn) + 64a^6}{64a^3}$$

$$= \frac{(m^2n^2 + 4a^2m^2 + 4a^2n^2 + 16a^4)}{16a^2}.\frac{\left[(m + n)^2 + 4a^2\right]}{4a} = FM.FN.FK.$$

Bài 367. Cho cônic (C) có hai tiêu điểm F_1, F_2; A, B là các đỉnh của (C) trên trục chứa F_1, F_2. Một tiếp tuyến tùy ý của (C) cắt các tiếp tuyến A_m, B_n của (C) lần lượt tại M, N.

Chứng minh tích AM.BN không đổi và đường tròn đường kính MN qua F_1; F_2.

Giải

Giả sử cônic (C) có phương trình: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow A(a; 0), B(-a; 0), F_1(-c;0); F_2(c;0)$

$\Rightarrow A_m: x = a; B_m: x = -a$

Gọi (T) là tiếp tuyến tại $D(x_0; y_0) \in (C)$: $\frac{x_0 x}{a^2} \pm \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

Thế x = a: $\frac{x_0 a}{a^2} \pm \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \pm\frac{y_0 y}{b^2} = 1 - \frac{x_0}{a} \Leftrightarrow y = \pm\frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right)$

$\Rightarrow M\left(a; \pm\frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right)\right)$

Tương tự $\Rightarrow N\left(-a; \pm\frac{b^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right)\right) \Rightarrow AM.BN = \frac{b^4}{y_0^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{y_0^2}\frac{y_0^2}{b^2} = b^2$

Gọi I là trung điểm MN: $I\left(0; \pm\frac{b^2}{y_0}\right)$

$MN^2 = 4a^2 + \frac{4b^4x_0^2}{a^2y_0^2} \Rightarrow$ Bán kính đường tròn đường kính MN:

$$R^2 = a^2 + \frac{b^4x_0^2}{a^2y_0^2} = a^2 + \frac{b^2.b^2x_0^2}{a^2y_0^2} = a^2 + \frac{b^2(a^2b^2 \mp a^2y_0^2)}{a^2y_0^2}$$

$$= a^2 + \frac{b^4}{y_0^2} \mp b^2 = C^2 + \frac{b^4}{y_0^2}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn đường kính MN:

$$x^2 + \left(y \mp \frac{b^2}{y_0}\right)^2 = C^2 + \frac{b^4}{y_0^2} \qquad (*)$$

Thế tọa độ $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ vào (*):

$$(\pm c)^2 + \left(\mp\frac{b^2}{y_0}\right)^2 = c^2 + \frac{b^4}{y_0^2} = R^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài 368. Cho cônic (C). Chứng minh tập hợp trung điểm các dây cung của (C) có phương không đổi (không cùng phương với tiệm cận nếu (C) là hyperbol) nằm trên một đường thẳng.

Giải

Giả sử cônic (C) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 \pm a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

Đường thẳng d: y = Ax + B cắt (C) tại M, N. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$b^2x^2 \pm a^2(Ax+B)^2 - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow b^2x^2 \pm a^2A^2x^2 \pm 2a^2ABx \pm a^2B^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 \pm a^2A^2)x^2 \pm 2a^2ABx \pm a^2B^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_M + x_N = \frac{\mp 2a^2AB}{b^2 \pm a^2A^2}.$$

Gọi I là trung điểm dây cung MN thì:

$$I\begin{cases} x = \pm\dfrac{a^2AB}{b^2 \pm a^2A^2} & (1) \\ y = \pm\dfrac{a^2A^2.B}{b^2 \pm a^2A^2} + B & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Leftrightarrow B = \pm\frac{b^2 + a^2A^2}{a^2A}x$ thế vào (2):

$$y = \pm\frac{a^2A^2\left(\dfrac{b^2 \pm a^2A^2}{a^2A}\right)x}{(b^2 \pm a^2A^2)} \pm \frac{b^2 \pm a^2A^2}{a^2A}.x = Ax \pm \frac{b^2 \pm a^2A^2}{a^2A}x$$

$\Leftrightarrow y = \left(A \pm \frac{b^2 \pm a^2A^2}{a^2A}\right)x$ là phương trình tập hợp các trung điểm các dây cung của (C) có phương không đổi $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 369. Tìm điều kiện của a, b, c, d để tại giao điểm của chúng, hai tiếp tuyến của (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và (H) $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1$ vuông góc với nhau.

Giải

Tọa độ các giao điểm của (E) và (H) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{d^2} = 1 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{a^2c^2(b^2+d^2)}{a^2d^2+b^2c^2} \\ y^2 = \dfrac{b^2d^2(a^2-c^2)}{a^2d^2+b^2c^2} \quad (a > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \pm ac\sqrt{\dfrac{b^2+d^2}{a^2d^2+b^2c^2}} \\ y_0 = \pm bd\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{a^2d^2+b^2c^2}} \end{cases}$$

Tiếp tuyến (T) của (E) tại $M(x_0;y_0)$: $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$

Tiếp tuyến (T') của (H) tại $M(x_0;y_0)$: $\frac{x_0}{c^2}x + \frac{y_0}{d^2}y = 1$

$$(T) \perp (T') \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2c^2} - \frac{y_0^2}{b^2d^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{a^2c^2(b^2+d^2)}{a^2d^2+b^2c^2}}{a^2c^2} - \frac{\dfrac{b^2d^2(a^2-c^2)}{a^2d^2+b^2c^2}}{b^2d^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{b^2+d^2}{a^2d^2+b^2c^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2d^2+b^2c^2}$$

$\Leftrightarrow a^2 - c^2 = b^2 + d^2$ (điều kiện này cũng có thể hiểu là (E) và (H) có cùng tiêu điểm).

Bài 370. Cho cônic (C) có tiêu điểm F và Δ là đường chuẩn tương ứng.

a. Đường thẳng d cắt (C) tại M, N và cắt đường chuẩn Δ tại I. Chứng minh:

α. Nếu d qua F thì $\dfrac{\overline{FM}}{\overline{FN}} = -\dfrac{\overline{IM}}{\overline{IN}}$.

β. Nếu d không qua F thì FI là một đường phân giác của góc $\widehat{MFN}$.

b. Tiếp tuyến tại M của (C) cắt đường chuẩn Δ tại K. Chứng minh FK ⊥ FM.

c. Hai tiếp tuyến của (C) tại M và N cắt nhau tại J. Chứng minh J ∈ Δ ⇔ MN qua F.

Giải

a. Giả sử (C) là (E) hoặc (H). F(c; 0), đường chuẩn tương ứng Δ: $x = \dfrac{a^2}{c}$

α. Đường thẳng d qua F có phương trình y = k(x – c), cắt (C) tại M, N

$$\frac{\overline{FM}}{\overline{FN}} = \frac{-\left(a - \dfrac{c}{a}x_M\right)}{\left(a - \dfrac{c}{a}x_N\right)} = \frac{-\dfrac{c}{a}\left(x_M - \dfrac{a^2}{c}\right)}{\dfrac{c}{a}\left(x_N - \dfrac{a^2}{c}\right)} = -\frac{\left(x_M - \dfrac{a^2}{c}\right)}{x_N - \dfrac{a^2}{c}} \quad (1)$$

(do $\overline{FM}$ trái chiều $\overline{FN}$)

d cắt Δ tại I thì $\dfrac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = \dfrac{y_M - y_I}{y_N - y_I} = \dfrac{k(x_M - c) - k(x_I - c)}{k(x_N - c) - k(x_I - c)}$

$$= \frac{x_M - x_I}{x_N - x_I} = \frac{x_M - \dfrac{a^2}{c^2}}{x_N - \dfrac{a^2}{c}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ⇒ $\dfrac{\overline{FM}}{\overline{FN}} = -\dfrac{\overline{IM}}{\overline{IN}}$ ⇒ điều phải chứng minh.

Nếu (C) là parabol (P): $y^2 = 2px$. Đường thẳng d có phương trình $y = k\left(x - \dfrac{p}{2}\right)$.

d cắt (P) tại M, N. $\overline{FM}$ và $\overline{FN}$ trái chiều nên: $\dfrac{\overline{FM}}{\overline{FN}} = -\dfrac{\left(x_M + \dfrac{p}{2}\right)}{\left(x_N + \dfrac{p}{2}\right)}$ (3)

Δ có phương trình $x + \frac{p}{2} = 0$. Δ cắt d tại I thì:

$$\frac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = \frac{x_M - x_I}{x_N - x_I} = \frac{x_M + \dfrac{p}{2}}{x_N + \dfrac{p}{2}} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{\overline{FM}}{\overline{FN}} = -\dfrac{\overline{IM}}{\overline{IN}}$

β. Giả sử (C) là parabol $y^2 = 2px \Rightarrow F\left(\frac{p}{2};0\right)$, Δ: $x = \frac{-p}{2}$. d có phương trình $y = ax + b$ (với $a \neq 0$ và $p \neq \frac{-2b}{a}$). Phương trình tung độ giao điểm của d và (P)

$$y = a\left(\frac{y^2}{2p}\right) + b \Leftrightarrow ay^2 - 2py + 2pb = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_M = \dfrac{p + \sqrt{p^2 - 2abp}}{a} \\ y_N = \dfrac{p - \sqrt{p^2 - 2abp}}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_M = \dfrac{p - ab + \sqrt{p^2 - 2abp}}{a^2} \\ x_N = \dfrac{p - ab - \sqrt{p^2 - 2abp}}{a^2} \end{array}\right.$$

Nếu FI là một đường phân giác của góc MFN thì: $\dfrac{IM}{IN} = \dfrac{FM}{FN}$.

$$\frac{FM}{FN} = \frac{x_M + \dfrac{p}{2}}{x_N + \dfrac{p}{2}} = \frac{\dfrac{p - ab + \sqrt{p^2 - 2abp}}{a^2} + \dfrac{p}{2}}{\dfrac{p - ab - \sqrt{p^2 - 2abp}}{a^2} + \dfrac{p}{2}}$$

$$= \frac{2p - 2ab + a^2p + 2\sqrt{p^2 - 2abp}}{2p - 2ab + a^2p - 2\sqrt{p^2 - 2abp}} \qquad (1)$$

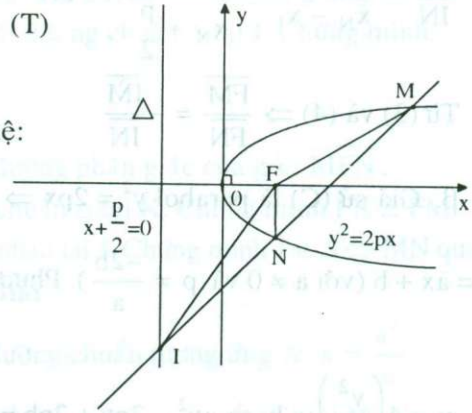
Do I, M, N thẳng hàng trên d nên: $\dfrac{IM}{IN} - \dfrac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = \dfrac{y_M - y_I}{y_N - y_I}$

$$= \frac{\dfrac{p+\sqrt{p^2-2abp}}{a}-\left(\dfrac{-ap}{2}+b\right)}{\dfrac{p-\sqrt{p^2-2abp}}{a}-\left(\dfrac{-ap}{2}+b\right)} = \frac{2p-2ab+a^2p+2\sqrt{p^2-2abp}}{2p-2ab+a^2p-2\sqrt{p^2-2abp}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{IM}{IN}=\dfrac{FM}{FN} \Rightarrow$ đpcm

b. (C) là parabol $y^2 = 2px$. $M(x_M; y_M) \in (P)$;

Δ: $x = -\dfrac{p}{2}$. Phương trình tiếp tuyến (T) của (P) tại M: $y_M.y = p(x + x_M)$.



Tọa độ giao điểm K là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{p}{2} \\ y_M.y = p(x + x_M) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow K\left(-\frac{p}{2};\frac{px_M-\dfrac{p^2}{2}}{y_M}\right)$$

$$\overrightarrow{KM} = \left(p;\frac{\dfrac{p^2}{2}-px_M}{y_M}\right);\ \overrightarrow{MF} = \left(\frac{p}{2}-x_M;-y_M\right)$$

$$\overrightarrow{KF}.\overrightarrow{MF} = \frac{p^2}{2}-px_M-\left(\frac{p^2}{2}-px_M\right) = 0 \Leftrightarrow FK \perp FM.$$

c. Tại M $(x_M; y_M) \in (P)$ có tiếp tuyến (T_1): $y_M.y=p(x+x_M)$

Tại $N(x_N; y_M) \in (P)$ có tiếp tuyến (T_2): $y_N.y = p(x + x_N)$

(T_1) qua $J(x_J; y_J) \Leftrightarrow y_M.y_J=p(x_J + x_M)$

(T_2) qua $J(x_J; y_J) \Leftrightarrow y_N.y_J = p(x_J + x_N)$

$\Rightarrow$ Tọa độ M và N thỏa chung phương trình: $y.y_J = p(x + x_J)$ đây là phương trình đường thẳng MN.

MN qua F $\Leftrightarrow O.y_J = p\left(\dfrac{p}{2}+x_J\right) \Leftrightarrow x_J+\dfrac{p}{2}=0 \Leftrightarrow J \in (\Delta)$

Nếu (C) là elip hoặc hyperbol: cách giải tương tự.

Bài 371. Cho cônic (C) có tiêu điểm F và Δ là đường chuẩn tương ứng. Đường thẳng d di động qua F và không vuông góc với Δ cắt (C) tại M, N.

Chứng minh $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}$ không đổi.

Đường thẳng d' qua F và vuông góc với d cắt (C) tại M', N'. Chứng minh $\frac{1}{MN}+\frac{1}{M'N'}$ không đổi.

Giải

Giả sử (C) là elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$

Phương trình d: $y=k(x-c)\qquad (k\neq 0)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (E) và d:

$b^2x^2+a^2k^2(x-c)^2-a^2b^2=0 \Leftrightarrow (b^2+a^2k^2)x^2-2a^2k^2cx+a^2k^2c^2-a^2b^2=0$

x_M, x_N là hai nghiệm phân biệt của phương trình này:

$$x_M+x_N=\frac{2a^2k^2c}{b^2+a^2k^2};\ x_M.x_N=\frac{a^2k^2c^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$$

$$FM=a-\frac{c}{a}x_M;\ FN=a-\frac{c}{a}x_N$$

$$\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}=\frac{FM+FN}{FM.FN}=\frac{a-\frac{c}{a}x_M+a-\frac{c}{a}x_N}{\left(a-\frac{c}{a}x_M\right)\left(a-\frac{c}{a}x_N\right)}$$

$$=\frac{2a-\frac{c}{a}(x_M+x_N)}{a^2-c(x_M+x_N)+\frac{c^2}{a^2}x_M.x_N}=\frac{2a-\frac{c}{a}\left(\frac{2a^2k^2c}{b^2+a^2k^2}\right)}{a^2-c\left(\frac{2a^2k^2c}{b^2+a^2k^2}\right)+\frac{c^2}{a^2}.\frac{a^2(k^2c^2-b^2)}{b^2+a^2k^2}}$$

$$=\frac{2a\left(1-\frac{k^2c^2}{b^2+a^2k^2}\right)}{a^2-\frac{2a^2c^2k^2}{b^2+a^2k^2}+\frac{c^2(k^2c^2-b^2)}{b^2+a^2k^2}}=\frac{2a\left[b^2+(a^2-c^2)k^2\right]}{a^2b^2+a^4k^2-2a^2c^2k^2+c^4k^2-c^2b^2}$$

$$=\frac{2a\left[b^2+b^2k^2\right]}{a^2b^2-c^2b^2+(a^4-2a^2c^2+c^4)k^2}=\frac{2ab^2(1+k^2)}{b^2(a^2-c^2)+(a^2-c^2)^2k^2}$$

$$=\frac{2ab^2(1+k^2)}{b^4(1+k^2)}=\frac{2a}{b^2}.$$

b. Thay k bởi $-\frac{1}{k}$ ta được: $x_{M'} + x_{N'} = \dfrac{2a^2\frac{1}{k^2}c}{b^2 + \frac{a^2}{k^2}} = \dfrac{2a^2c}{b^2k^2 + a^2}$

$$MN = FM + FN = a - \frac{c}{a}x_M + a - \frac{c}{a}x_N$$

$$= 2a - \frac{c}{a}(x_M + x_N) = 2a - \frac{c}{a}.\frac{2a^2k^2c}{b^2 + a^2k^2}$$

$$= 2a - \frac{2ac^2k^2}{b^2 + a^2k^2} = 2a\left(1 - \frac{c^2k^2}{b^2 + a^2k^2}\right)$$

$$= 2a\left(\frac{b^2 + a^2k^2 - c^2k^2}{b^2 + a^2k^2}\right) = \frac{2a.b^2\left(1 + k^2\right)}{b^2 + a^2k^2}$$

$$M'N' = FM' + FN' = a - \frac{c}{a}x_{M'} + a - \frac{c}{a}x_{N'} = 2a - \frac{c}{a}(x_{M'} + x_{N'})$$

$$= 2a - \frac{c}{a}\left(\frac{2a^2c}{b^2k^2 + a^2}\right) = 2a\left(1 - \frac{c^2}{b^2k^2 + a^2}\right)$$

$$= 2a\frac{b^2k^2 + a^2 - c^2}{b^2k^2 + a^2} = \frac{2ab^2(1 + k^2)}{b^2k^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{MN} + \frac{1}{M'N'} = \frac{b^2 + a^2k^2}{2ab^2(1 + k^2)} + \frac{b^2k^2 + a^2}{2ab^2(1 + k^2)}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2).k^2}{2ab^2(1 + k^2)} = \frac{(a^2 + b^2)(1 + k^2)}{2ab^2(1 + k^2)} = \frac{a^2 + b^2}{2ab^2}.$$

Nếu (C) là hyperbol hoặc parabol: giải tương tự.

Bài 372. a. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y^2 = 2px$ $(p > 0)$. Chứng minh độ dài dây cung của (P) qua tiêu điểm và vuông góc với Ox là 2p.

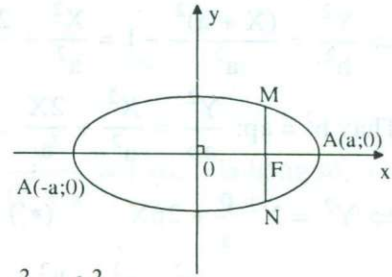
b. Trong mặt phẳng Oxy cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ có tâm sai e. Đặt 2p là độ dài dây cung của (E) qua tiêu điểm và vuông góc với Ox; $q = e^2 - 1$. Gọi A là đỉnh của (E) trên trục lớn có hoành độ âm. Chứng minh $p = \frac{b^2}{a}$ và khi tịnh tiến theo $\overrightarrow{OA}$ đưa hệ trục Oxy về hệ AXY, phương trình của (E) đối với hệ AXY là: $Y^2 = 2pX + qX^2$.

c. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ có tâm sai e. Đặt 2p là độ dài dây cung của (H) qua tiêu điểm và vuông góc với Ox, $q = e^2 - 1$. Gọi A là đỉnh của (H) trên trục thực và có hoành độ dương. Chứng minh $p = \frac{b^2}{a}$ và khi tịnh tiến theo $\overrightarrow{OA}$ đưa hệ trục Oxy về hệ trục AXY, phương trình của (H) đối với hệ AXY là: $Y^2 = 2pX + qX^2$.

Giải

a. Dây cung qua $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và vuông góc với Ox cắt (P) tại M và N đối xứng nhau qua Ox. $FM = x_M + \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p$

$\Rightarrow MN = 2FM = 2p$.



b. $MN = 2p \Rightarrow FM = p$

$F(c;\,0) \quad FM = a - \frac{c}{a}x_M = a - \frac{c}{a}c = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} \Rightarrow b^2 = ap$

$\overrightarrow{OA} = (-a;0)$

Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến: $\begin{cases} x = -a + X \\ y = Y \end{cases}$

Trong hệ trục AXY, (E) có phương trình: $\frac{(X-a)^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{Y^2}{b^2} = 1 - \frac{X^2 - 2aX + a^2}{a^2} = \frac{2X}{a} - \frac{X^2}{a^2}$$

Thay $b^2 = ap$: $\frac{Y^2}{ap} = \frac{2X}{a} - \frac{X^2}{a^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{Y^2}{p} = 2X - \frac{X^2}{a} \Leftrightarrow Y^2 = 2pX - \frac{p}{a}X^2 \qquad (*)$$

Từ $q = e^2 - 1 \Leftrightarrow q = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{-b^2}{a^2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{-b^2}{q} = \frac{-ap}{q}$

$\Leftrightarrow a = -\frac{p}{q}$. Thế vào (*):

$$Y^2 = 2pX - \frac{pX^2}{-\frac{p}{q}} = 2pX + qX^2.$$

c. (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: F(c; 0). Dây cung qua F, vuông góc với Ox là MN = 2p thì:

$$FM = p = -a + \frac{c}{a} = \frac{-a^2 + c^2}{a} = \frac{b^2}{a} \Leftrightarrow b^2 = ap.\ A(a;0) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (a;0).$$

Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến: $\begin{cases} x = a + X \\ y = Y \end{cases}$

Trong hệ AXY, (H) có phương trình: $\frac{(X+a)^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{Y^2}{b^2} = \frac{(X+a)^2}{a^2} - 1 = \frac{X^2}{a^2} + \frac{2X}{a}$$

Thay $b^2 = ap$: $\frac{Y^2}{ap} = \frac{X^2}{a^2} + \frac{2X}{a} \Leftrightarrow \frac{Y^2}{p} = \frac{X^2}{a} + 2X$

$$\Leftrightarrow Y^2 = X^2.\frac{p}{a} + 2pX \qquad (*')$$

Từ $q = e^2 - 1 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{ap}{a^2} = \frac{p}{a} \Leftrightarrow a = \frac{p}{q}$ thế vào (*'):

$$Y^2 = X^2 \frac{p}{\frac{p}{q}} + 2pX = 2pX + qX^2$$

Bài 373. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$. $(a > 0)$ và hằng số $k \neq 0$. Điểm M di động trong mặt phẳng. Gọi H là hình chiếu của M trên Ox. Tìm tập hợp (C) những điểm M sao cho $MH^2 = k.\overline{HA_1}.\overline{HA_2}$. Biện luận hình dạng của (C) theo k.

Giải

Gọi M(x; y): H(x; 0)

$MH^2 = y^2 = k(-a - x)(a - x) = k(x^2 - a^2)$

$$\Leftrightarrow kx^2 - y^2 = ka^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{ka^2} = 1$$

- Nếu $k = -1$: (C) là đường tròn.
- $k < 0, k \neq -1$ (C) là elip
- $k > 0$: (C) là hyperbol

Bài 374. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$ $(a > 0)$. Tìm tập hợp (C) các điểm M trong mặt phẳng sao cho tích các hệ số góc của các đường thẳng A_1M và A_2M bằng hằng số $\lambda \neq 0$. Biện luận theo ≠ hình dạng quĩ tích.

Giải

Gọi M(x; y)

$\overrightarrow{A_1M} = (x + a; y)$ có hệ số góc $k_1 = \dfrac{y}{x + a}$

$\overrightarrow{A_2M} = (x - a; y)$ có hệ số góc $k_2 = \dfrac{y}{x - a}$

Theo yêu cầu bài toán: $k_1.k_2 = \lambda \Leftrightarrow \dfrac{y}{x + a}.\dfrac{y}{x - a} = \lambda$

$\Leftrightarrow y^2 = \lambda(x^2 - a^2) \Leftrightarrow \lambda x^2 - y^2 = \lambda a^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{\lambda a^2} = 1$

- Nếu $\lambda = -1$: (C) là đường tròn.
- Nếu $\lambda < 0, \lambda \neq -1$: (C) là elip.
- Nếu $\lambda > 0$ (C) là hyperbol.

Bài 375. Cho họ đường cong (C_k): $\dfrac{x^2}{\alpha^2 + k} + \dfrac{y^2}{\beta^2 + k} = 1$ (α, β là hằng số, $\alpha > \beta > 0$, k là tham số thỏa $-\alpha^2 < k \neq -\beta^2$).

a. Chứng minh các đường (C_k) là các cônic có chung tiêu điểm.

b. Chứng minh với mỗi điểm $M(x_0; y_0)$ trong mặt phẳng sao cho $x_0.y_0 \neq 0$ có hai đường (C_k) đi qua M, một đường là elip, một đường là hyperbol và tiếp tuyến của hai đường này tại M vuông góc với nhau.

Giải

a. Nếu (C_k) là elip (E): thì $C^2 = a^2 - b^2 = \alpha^2 + k - \beta^2 - k = \alpha^2 - \beta^2$

Nếu (C_k) là hyperbol (H) thì $\left.\begin{aligned} a^2 &= \alpha^2 + k \\ -b^2 &= \beta^2 + k \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 = \alpha^2 - \beta^2$

$\Leftrightarrow$ Các cônic (C_k) có chung tiêu điểm.

b. $M(x_0; y_0) \in (C_k) \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{\alpha^2 + k} + \dfrac{y_0^2}{\beta^2 + k} = 1$

$\Leftrightarrow x_0^2(\beta^2 + k) + y_0^2(\alpha^2 + k) = (\alpha^2 + k)(\beta^2 + k)$

$\Leftrightarrow k^2 - (x_0^2 + y_0^2 - \alpha^2 - \beta^2)k + \alpha^2\beta^2 - \beta^2x_0^2 - \alpha^2y_0^2 = 0 \quad (*)$

Theo giả thiết thì $\alpha^2 + k > 0$

Nếu có hai cônic (C_k) cùng đi qua $M(x_0; y_0)$ thì (*) phải có hai nghiệm phân biệt k_1, k_2 thỏa $k_1 < -\beta^2 < k_2$, với.

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = x_0^2 + y_0^2 - \alpha^2 - \beta^2 \\ k_1.k_2 = \alpha^2\beta^2 - \beta^2x_0^2 - \alpha^2y_0^2 \end{cases}$$

$k_1 + \beta^2 < 0, k_2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow (k_1 + \beta^2)(k_2 + \beta^2) < 0$

$\Leftrightarrow k_1k_2 + \beta^2(k_1 + k_2) + \beta^4 < 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2 - \beta^2 x_0^2 - \alpha^2 y_0^2 + \beta^2(x_0^2 + y_0^2 - \alpha^2 - \beta^2) + \beta^4 < 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2 - \beta^2 x_0^2 - \alpha^2 y_0^2 + \beta^2 x_0^2 + \beta^2 y_0^2 - \alpha^2\beta^2 - \beta^4 + \beta^4 < 0$

$\Leftrightarrow y_0^2(\beta^2 - \alpha^2) < 0$, bất đẳng thức này đúng $\Rightarrow$ Ứng với k_1, (C_k) là hyperbol, ứng với k_2, (C_k) là elip.

Hai cônic này có chung tiêu điểm, vậy các tiếp tuyến của (H) và (E) tại các giao điểm của chúng sẽ vuông góc với nhau (xem bài tập 369, kết luận cuối bài giải).

Bài 376. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho cônic (C_m): $\dfrac{x^2}{m^2} + \dfrac{y^2}{m^2 - c^2} = 1$ (c là hằng số dương, m là tham số khác c).

a. Biện luận theo m hình tính của (C_m) và chứng minh các cônic (C_m) có chung tiêu điểm.

b. Chứng minh với mỗi điểm $M_0(x_0; y_0)$ không nằm trên hai trục tọa độ có một elip (E) và một hyperbol (H) của họ (C_m) đi qua M_0 và tại M_0 các tiếp tuyến của (E) và (H) vuông góc nhau.

c. $I(a; 0)$ là điểm cố định $(a \neq 0)$. Khi m thay đổi, tìm tập hợp các tiếp điểm của các tiếp tuyến qua I của (C_m).

Giải

a. Xét dấu $m^2 - c^2$:

m		$-c$		c	
$m^2 - c^2$	$+$	0	$-$	0	$+$

- Nếu $m < -c$ hay $m > c$: (C_m) là elip
- Nếu $-c < m < c$: (C_m) là hyperbol

Trong cả hai trường hợp trên, bình phương nửa tiêu cự của (C_m) đều bằng c^2

$\Leftrightarrow$ Các (C_m) có chung tiêu điểm $F_1(-c;0)$; $F_2(c;0)$.

b. (C_m) qua $M_0(x_0; y_0) \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{m^2} + \dfrac{y_0^2}{m^2 - c^2} = 1$

$\Leftrightarrow x_0^2(m^2 - c^2) + y_0^2 m^2 = m^2(m^2 - c^2)$

$\Leftrightarrow m^4 (x_0^2 + y_0^2 + c^2)m^2 + c^2x_0^2 = 0$

Nếu m_1^2, m_2^2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình này thì:

$$\begin{cases} m_1^2 + m_2^2 = x_0^2 + y_0^2 + c^2 \\ m_1^2.m_2^2 = c^2x_0^2 \end{cases}$$

Nếu có một elip (E), một hylerbol (H) ứng với hai giá trị $m_1 \neq m_2$ thì:

$m_1^2 < c^2 < m_2^2 \Leftrightarrow (m_1^2 - c^2)(m_2^2 - c^2) < 0$ (*)

$\Leftrightarrow m_1^2.m_2^2 - c^2(m_1^2 + m_2^2) + c^4 < 0 \Leftrightarrow c^2x_0^2 - c^2(x_0^2 + y_0^2 + c^2) + c^4 < 0$

$\Leftrightarrow c^2x_0^2 - c^2x_0^2 - c^2y_0^2 - c^4 + c^4 < 0 \Leftrightarrow -C^2y_0^2 < 0 \Leftrightarrow (*)$ đúng

$\Leftrightarrow$ có một hyperbol (H) và một elip (E) của họ (C_m) đều đi qua $M_0(x_0; y_0)$.

Do (H) và (E) có chung tiêu điểm nên các tiếp tuyến của (H) và (E) tại các giao điểm của chúng vuông góc nhau (xem kết luận của bài 369).

c. Phương trình tiếp tuyến (T) của (C_m) tại $M(x_0; y_0) \in (C_m)$

$$\frac{x_0x}{m^2} + \frac{y_0y}{m^2 - c^2} = 1$$

(T) qua I(a; 0) $\Leftrightarrow \dfrac{ax_0}{m^2} = 1 \Leftrightarrow m^2 = ax_0$

$M(x_0; y_0) \in (C_m) \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{m^2} + \dfrac{y_0^2}{m^2 - c^2} = 1 \qquad (*')$

Thay $m^2 = ax_0$ vào (*')

$$\frac{x_0^2}{ax_0} + \frac{y_0^2}{ax_0 - c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_0}{a} + \frac{y_0^2}{ax_0 - c^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_0^2}{ax_0 - c^2} = 1 - \frac{x_0}{a} \Leftrightarrow y_0^2 = ax_0 - c^2 - \frac{x_0}{a}(ax_0 - c^2)$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 = ax_0 - c^2 - x_0^2 + \frac{c^2x_0}{a} \Leftrightarrow x_0^2 - \left(a + \frac{c^2}{a}\right)x_0 + y_0^2 = -c^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x_0^2 - 2.\frac{a^2 + c^2}{2a}.x_0 + \frac{(a^2 + c^2)^2}{4a^2}\right) + y_0^2 = -c^2 + \frac{(a^2 + c^2)^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x_0 - \frac{a^2 + c^2}{2a}\right)^2 + y_0^2 = -c^2 + \frac{(a^2 + c^2)^2}{4a^2} = \left(\frac{a^2 + c^2}{2a}\right)^2$$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp các tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ là đường tròn (C) có phương trình:

$$\left(x - \frac{a^2 + c^2}{2a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a^2 + c^2}{2a}\right)^2.$$

Bài 377. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi (C_m) là tập hợp các điểm có tọa độ (x; y) thỏa phương trình $y^2 = (x^2 + 2x).m - 3$ (m là tham số thực). Định m để (C_m) là một cônic. Khi đó tùy theo m hãy cho biết hình dạng và tâm sai của (C_m) trong mỗi trường hợp.

Giải

$y^2 = (x^2 + 2x)m - 3 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1)m - y^2 = m + 3$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1)m - y^2 = m + 3 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{\frac{m+3}{m}} - \frac{y^2}{(m+3)} = 1$$

- Nếu $m > 0$: (C_m) là hyperbol có $a^2 = \dfrac{m+3}{m}$; $b^2 = m + 3$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = \frac{m+3}{m} + m + 3 = \frac{(m+3)(m+1)}{m}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{(m+3)(m+1)}{m}},\ a = \sqrt{\frac{m+3}{m}} \Rightarrow \text{tâm sai } e = \sqrt{m+1}$$

- Nếu $m < -3$ hoặc $m < -3 \vee m > 0$ (C_m) là elip

$$a^2 = \frac{m+3}{m},\ b^2 = m + 3 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = \frac{(m+3)(1-m)}{m}$$

$$a = \sqrt{\frac{m+3}{m}};\ c = \sqrt{\frac{(m+3)(1-m)}{m}} \Rightarrow \text{tâm sai } e = \sqrt{1-m}\ \ (0 < m < 1).$$

Bài 378. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ và đường thẳng d: $x - m = 0$. Điểm M chạy trên (C). Đường thẳng OM cắt đường thẳng d ở L. Gọi N là điểm thuộc đường thẳng OM sao cho: $\dfrac{\overline{NO}}{\overline{NL}} + \dfrac{\overline{MO}}{\overline{ML}} = 0$

a. Đặt $(Ox, OM) = \theta[2\pi]$. Tính tọa độ M, L, N theo θ và m.

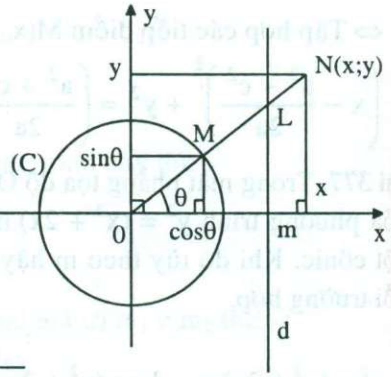
b. Chứng minh khi M chạy trên (C), tập hợp các điểm N có phương trình:

$(m^2 - 4)x^2 + m^2y^2 - 4mx - m^2 = 0$ (1).

c. Phương trình (1) hiển thị một họ đường cong (C_m) trong đó m là tham số thực dương. Chứng minh $\forall m > 0$, (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

d. Chứng minh $\forall m > 0$, (C_m) là cônic nhận O làm tiêu điểm và Ox làm một trục đối xứng. Biện luận theo m hình dạng của các cônic (C_m).

Giải



a. $M(\cos\theta; \sin\theta))$; $L(m; m\tan\theta)$

Nếu N(x; y) thì: $\dfrac{\overline{NO}}{\overline{NL}} + \dfrac{\overline{MO}}{\overline{ML}} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{0 - x}{m - x} - \frac{\cos\theta}{m - \cos\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x - m} = \frac{\cos\theta}{m - \cos\theta}$$

$$\Leftrightarrow mx - x\cos\theta = x\cos\theta - m\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow (m - 2\cos\theta)x = -m\cos\theta \Leftrightarrow x = \frac{m\cos\theta}{2\cos\theta - m}$$

$$\Rightarrow y = \frac{m\cos\theta}{2\cos\theta - m}.\tan\theta = \frac{m\sin\theta}{2\cos\theta - m}$$

$$\Rightarrow N\left(\frac{m\cos\theta}{2\cos\theta - m}; \frac{m\sin\theta}{2\cos\theta - m}\right)$$

b. Phương trình tham số của tập hợp điểm N

$$\begin{cases} x = \dfrac{m\cos\theta}{2\cos\theta - m} & (1) \\ y = \dfrac{m\sin\theta}{2\cos\theta - m} & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{mx}{2x - m}$$

Từ (2) $\Leftrightarrow 2\cos\theta.y - my = m\sin\theta \Leftrightarrow \sin\theta = \dfrac{2\cos\theta}{m}y - y$

$$\Leftrightarrow \sin\theta = \frac{2\left(\dfrac{mx}{2x - m}\right)}{m}y - y = \frac{2xy}{2x - m} - y = \frac{2xy - my + my}{2x - m} - y$$

$$= \frac{(2x - m)y}{2x - m} + \frac{my}{2x - m} - y = \frac{my}{2x - m}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \sin^2\theta = \dfrac{m^2y^2}{(2x - m)^2} \\ \cos^2\theta = \dfrac{m^2x^2}{(2x - m)^2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \frac{m^2y^2 + m^2x^2}{(2x - m)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2y^2 + m^2x^2 = 4x^2 - 4mx + m^2$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 4)x^2 + m^2y^2 + 4mx - m^2 = 0 \text{ (đpcm).}$$

c. $(m^2 - 4)x^2 + m^2y^2 + 4mx - m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2(x^2 + y^2 - 1) + 4mx - 4x^2 = 0$ (*)

(*) thỏa $\forall m$ tại $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định A(0; 1), B(0;−1).

d. Nếu m = 2. (C): $4y^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 = 4 - 8x \Leftrightarrow y^2 = 1 - 2x$: parabol có F(0; 0).

Nếu $m \neq 2$: $(m^2 - 4)x^2 + m^2y^2 + 4mx - m^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 4)\left[x^2 + 2x\frac{2m}{m^2 - 4} + \frac{4m^2}{(m^2 - 4)^2}\right] - \frac{4m^2}{m^2 - 4} + m^2y^2 = m^2$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 4)\left(x + \frac{2m}{m^2 - 4}\right)^2 + m^2y^2 = m^2 + \frac{4m^2}{m^2 - 4} = \frac{m^4}{m^2 - 4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 - 4}{m^2}\left(x + \frac{2m}{m^2 - 4}\right)^2 + y^2 = \frac{m^2}{m^2 - 4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{2m}{m^2-4}\right)^2}{\left(\frac{m^2}{m^2-4}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{m^2}{m^2-4}\right)}=1 \Rightarrow m>2\text{: } (C_m) \text{ là elip}$$

$0 < m < 2$: (C_m) là hyperbol.

Trong cả hai trường hợp trên, (C_m) có một trục đối xứng là Ox

- Nếu $m > 2$: $c^2=\left(\frac{m^2}{m^2-4}\right)^2-\frac{m^2}{m^2-4}=\frac{4m^2}{(m^2-4)^2}\Rightarrow c=\frac{2m}{m^2-4}$

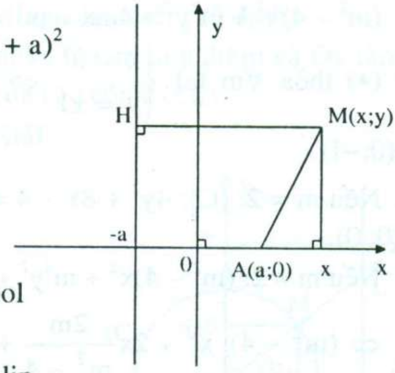
- Nếu $0 < m < 2$: $c^2=\left(\frac{m^2}{m^2-4}\right)^2-\frac{m^2}{m^2-4}=\frac{4m^2}{(m^2-4)^2}\Rightarrow c=\frac{2m}{m^2-4}$

Trong cả hai trường hợp: $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{2m}{m^2-4}}{\frac{m^2}{m^2-4}}=\frac{2}{m}$

Tiêu điểm $F\left(\frac{2m}{m^2-4};0\right)$ đưa về hệ Oxy: F(0; 0).

Bài 379. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(a; 0) và đường thẳng d: $x = -a$. Điểm M di động trong mặt phẳng Oxy, gọi H là hình chiếu của M trên d. Tìm quĩ tích các điểm M sao cho $MA^2 + \lambda MH^2 = d^2$ (a, λ, d là các hằng số; a, d > 0). Biện luận theo a, λ, d hình dạng của quĩ tích.

Giải



Gọi M(x; y): $MA^2 = (a - x)^2 + y^2$; $MH^2 = (x + a)^2$

$MA^2 + \lambda MH^2 = d^2$

$\Leftrightarrow (a - x)^2 + y^2 + \lambda(x + a)^2 = d^2$

$\Leftrightarrow (\lambda + 1)x^2 - 2a(1 - \lambda)x + y^2$

$= d^2 - a^2(\lambda + 1)$ (*)

- Nếu $\lambda = -1$ (*) trở thành:

  $-4ax + y^2 = d^2 \Leftrightarrow y^2 = 4ax + d^2$, ta có parabol

- Nếu $\lambda = 1$: (*) trở thành:

  $2x^2 + y^2 = d^2 - 2a^2$. Nếu $d^2 > 2a^2$ thì (*) là elip

- Nếu $\lambda \neq -1$: (*) trở thành: $(\lambda + 1)x^2 - 2a(1 - \lambda)x + y^2 = d^2 - a^2(\lambda - 1)$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)\left[x^2-2a\frac{1-\lambda}{\lambda+1}x+\frac{a^2(1-\lambda)^2}{(\lambda+1)^2}\right]-\frac{a^2(1-\lambda)^2}{\lambda+1}+y^2=d^2$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)\left[x + a\left(\frac{\lambda+1}{\lambda+1}\right)\right]^2 + y^2 = d^2 + \frac{a^2(\lambda-1)^2}{\lambda+1}$$

(*) là elip nếu $\lambda > -1$.

(*) là hyperbol nếu $\lambda < -1$.

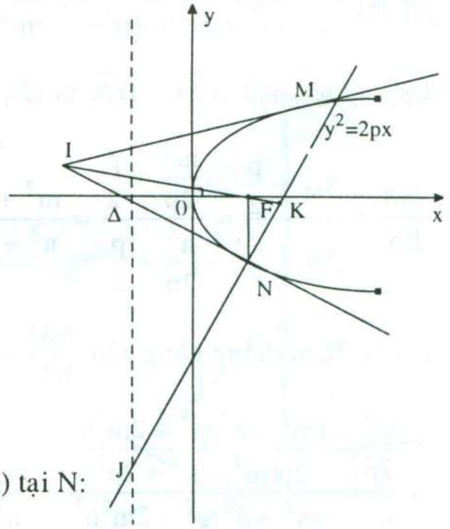
Bài 380. Cho cônic (C) tiêu điểm F. M, N là hai điểm thuộc (C) (Nếu (C) là hyperbol thì M, N thuộc cùng một nhánh).

a. Các tiếp tuyến của (C) tại M và N cắt nhau tại I. Chứng minh $\widehat{IFM} = \widehat{IFN}$

b. Gọi Δ là đường chuẩn của (C) ứng với tiêu điểm F. Đường thẳng MN cắt Δ tại J. Chứng minh $FI \perp FJ$.

Giải

a. Gọi $M\left(\frac{m^2}{2p};m\right)$; $N\left(\frac{n^2}{2p};n\right)$ là hai điểm tùy ý thuộc (P):



Phương trình đường thẳng MN:

$$\frac{x - \frac{n^2}{2p}}{\frac{m^2 - n^2}{2p}} = \frac{y-n}{m-n} \Leftrightarrow 2p\left(x - \frac{n^2}{2p}\right)$$

$$= (m+n)y - mn - n^2$$

$$\Leftrightarrow 2px - (m+n)y = -mn$$

Phương trình tiếp tuyến (T_M) tại M:

$$my = p\left(x + \frac{m^2}{2p}\right) \Leftrightarrow px - my = -\frac{m^2}{2}$$

Tương tự có phương trình tiếp tuyến (T_N) tại N:

$$px - ny = -\frac{n^2}{2}$$

Tọa độ giao điểm I của (T_M) và (T_N) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} px - my = -\dfrac{m^2}{2} \\ px - ny = -\dfrac{n^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\frac{m^2n - mn^2}{2}}{p(m-n)} = \dfrac{mn}{2p} \\ y = \dfrac{p\left(\frac{m^2 - n^2}{2}\right)}{p(m-n)} = \dfrac{m+n}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{mn}{2p};\frac{m+n}{2}\right)$$

Phương trình đường thẳng IF: $\dfrac{x-\dfrac{p}{2}}{\dfrac{mn}{2p}-\dfrac{p}{2}}=\dfrac{y}{\dfrac{m+n}{2}}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m+n}{2}\right)x-\left(\frac{mp}{2p}-\frac{p}{2}\right)y=\frac{p(m+n)}{4}$$

IF cắt MN tại K. Tọa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2px-(m+n)y=-mn\\ \left(\dfrac{m+n}{2}\right)x-\left(\dfrac{mn}{2p}-\dfrac{p}{2}\right)y=\dfrac{p(m+n)}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{(m^2+n^2)p^2+2m^2n^2}{2p(m^2+n^2+2p^2)}\\ y=\dfrac{(m+n)(p^2+mn)}{m^2+n^2+2p^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{(m^2+n^2)p^2+2m^2n^2}{2p(m^2+n^2+2p^2)};\frac{(m+n)(p^2+m.n)}{m^2+n^2+2p^2}\right)$$

Để chứng minh $\widehat{IFM}=\widehat{IFN}$ ta cần chứng minh: $\dfrac{FM}{FN}=\dfrac{KM}{KN}$

- $$\frac{FM}{FN}=\frac{x_M+\dfrac{p}{2}}{x_N+\dfrac{p}{2}}=\frac{\dfrac{m^2}{2p}+\dfrac{p}{2}}{\dfrac{n^2}{2p}+\dfrac{p}{2}}=\frac{m^2+p^2}{n^2+p^2}$$

Do M, N, K thẳng hàng nên $\dfrac{KM}{KN}=\dfrac{\overline{KM}}{\overline{KN}}=\dfrac{x_M-x_K}{x_N-x_K}$

$$=\frac{\dfrac{m^2}{2p}-\dfrac{(m^2+n^2)p^2+2m^2n^2}{2p(m^2+n^2+2p^2)}}{\dfrac{n^2}{2p}-\dfrac{(m^2+n^2)p^2-2m^2n^2}{2p(m^2+n^2+2p^2)}}=\frac{m^2(m^2+n^2+2p^2)-m^2p^2-n^2p^2-2m^2n^2}{n^2(m^2+n^2+2p^2)-m^2p^2-n^2p^2-2m^2n^2}$$

$$=\frac{m^2(m^2-n^2)+p^2(m^2-n^2)}{n^2(m^2-n^2)+p^2(m^2-n^2)}=\frac{(m^2-n^2)(m^2+p^2)}{(m^2-n^2)(n^2+p^2)}=\frac{m^2+p^2}{n^2+p^2}=\frac{FM}{FN}$$

$\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

b. Đường chuẩn Δ: $x=-\dfrac{p}{2}$

Đường thẳng Mn cắt Δ tại J. Tọa độ J là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{p}{2} \\ 2px - (m+n)y = -mn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{p}{2} \\ y = \dfrac{mn - p^2}{m+n} \end{cases} \Rightarrow J\left(-\dfrac{p}{2}; \dfrac{mn - p^2}{m+n}\right)$$

- $\overrightarrow{FI} = \left(\dfrac{mn}{2p} - \dfrac{p}{2}; \dfrac{m+n}{2}\right)$; $\overrightarrow{FJ} = \left(-p; \dfrac{mn - p^2}{m+n}\right)$

$$\overrightarrow{FI}.\overrightarrow{FJ} = -p\left(\dfrac{m.n}{2p} - \dfrac{p}{2}\right) + \dfrac{(m+n)}{2}.\dfrac{(mn - p^2)}{(m+n)} = -\dfrac{m.n}{2} + \dfrac{p^2}{2} + \dfrac{mn}{2} - \dfrac{p^2}{2} = 0$$

$\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Bài 381. Cho một cônic (C).

a. Cố định I $\in$ (C). Hai điểm M, N di động trên (C) sao cho tam giác IMN vuông tại I. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định J nằm trên pháp tuyến của (C) tại I.

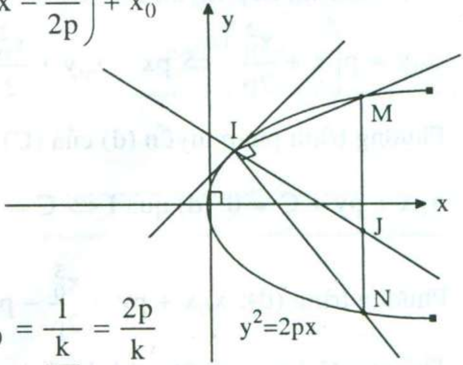
b. Chứng minh khi I chạy trên (C) thì J chạy trên một cônic (C') cùng loại với (C)

Giải

Giả sử (C) là parabol $y^2 = 2px$ $(p > 0)$

a. Gọi $I\left(\dfrac{x_0^2}{2p}; x_0\right) \in (C)$

Phương trình đường thẳng IM: $y = k\left(x - \dfrac{x_0^2}{2p}\right) + x_0$



Phương trình tung độ giao điểm M

$$y = k.\dfrac{y^2}{2p} - \dfrac{kx_0^2}{2p} + x_0 \qquad (k \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow k\dfrac{y^2}{2p} - y - \dfrac{kx_0^2}{2p} + x_0 = 0$$

Gọi $M(x_M; y_M)$ thì $y_M + y_I = y_M + x_0 = \dfrac{1}{\dfrac{k}{2p}} = \dfrac{2p}{k}$

$$\Leftrightarrow y_M = \dfrac{2p}{k} - x_0 \Rightarrow x_M = \dfrac{y_M^2}{2p} = \dfrac{\left(\dfrac{2p}{k} - x_0\right)^2}{2p}$$

Thay k bởi $-\dfrac{1}{k}$ được $y_N = \dfrac{2p}{-\dfrac{1}{k}} - x_0 = -2pk - x_0$

$$\Rightarrow x_N = \frac{y_N^2}{2p} = \frac{(-2pk - x_0)^2}{2p}$$

Phương trình đường thẳng MN:

$$\frac{x - x_N}{x_M - x_N} = \frac{y - y_N}{y_M - y_N} \Leftrightarrow \frac{x - x_N}{\dfrac{y_M^2 - y_N^2}{2p}} = \frac{y - y_N}{y_M - y_N} \Leftrightarrow \frac{2p(x - x_N)}{y_M + y_N} = y - y_N$$

$$\Leftrightarrow 2px - 2px_N = \left(\frac{2p}{k} - x_0 - 2pk - x_0\right)y - y_M.y_N - y_N^2$$

$$\Leftrightarrow 2px = -2p\left(k - \frac{1}{k}\right)y - 2x_0y + 4p^2 - 2px_0\left(k - \frac{1}{k}\right) - x_0^2$$

$$\Leftrightarrow 2px + 2x_0y - 4p^2 + x_0^2 = -2p\left(k - \frac{1}{k}\right)(y + x_0)\,2$$

Phương trình MN thỏa ∀k ≠ 0 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y + x_0 = 0 \\ 2px + 2x_0y - 4p^2 + x_0^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_0^2 + 4p^2}{2p} \\ y = -x_0 \end{cases}$$

⇒ Đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định $J\left(\dfrac{x_0^2 + 4p^2}{2p}; -x_0\right)$

Phương trình tiếp tuyến I ∈ (C)

$$x_0y = p\left(x + \frac{x_0^2}{2p}\right) \Leftrightarrow px - x_0y + \frac{x_0^2}{2} = 0$$

Phương trình pháp tuyến (d) của (C) tại I có dạng:

$x_0x + py + C = 0$ (d) qua I $\Leftrightarrow C = -\dfrac{x_0^3}{2p} - px_0$

Phương trình (d): $x_0x + py - \dfrac{x_0^3}{2p} - px_0 = 0$

Thế tọa độ J vào phương trình (d)

$x_0\left(\dfrac{x_0^2 + 4p^2}{2p}\right) - px_0 - \dfrac{x_0^3}{2p} - px_0 = 0 \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

MỤC LỤC

Chương I: Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

A. Tóm tắt giáo khoa 3
B. Đề toán và lời giải 3

Chương II: Đường thẳng

A. Tóm tắt giáo khoa 22
B. Đề toán và lời giải 22

Chương III: Đường tròn

A. Tóm tắt giáo khoa 71
B. Đề toán và lời giải 71

Chương IV: Elip

A. Tóm tắt giáo khoa 111
B. Đề toán và lời giải 111

Chương V: Hyperbol

A. Tóm tắt giáo khoa 230
B. Đề toán và lời giải 231

Chương VI: Parabol

A. Tóm tắt giáo khoa 323
B. Đề toán và lời giải 324